浙江科技学院第七届高等数学竞赛试题及参考答案

1．计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^1 \frac{\sin(tx^2)}{t}dt-x^2}{x^6}$．（10 分）

解：令 $u=tx^2$，则原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\frac{\sin u}{u}du-x^2}{x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x-2x}{6x^5}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2-x^2}{3x^6}=\lim_{v\to 0}\frac{\sin v-v}{3v^3}=\lim_{v\to 0}\frac{\cos v-1}{9v^2}=-\frac{1}{18}.$$

2．计算不定积分 $\int\dfrac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$．（10 分）

解：$\int\dfrac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\int\dfrac{x}{(1+x^2)^{1/2}}de^{\arctan x}=\dfrac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{1/2}}-\int\dfrac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$

$$=\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{1/2}}-\int\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}de^{\arctan x}=\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{1/2}}-[\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{1/2}}-\int\frac{-xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx]$$

$$=\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{1/2}}-\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{1/2}}-\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\frac{1}{2}\frac{(x-1)e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

3．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且满足 $f(x)=e^x+x\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$，求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值与最小值．（10 分）

解：令 $t=\sqrt{x}$，则 $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=2\int_0^1 tf(t)dt$， 从而 $f(x)=e^x+2x\int_0^1 tf(t)dt$

令 $a=\int_0^1 tf(t)dt$，则有 $f(x)=e^x+2ax$，

故 $a=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 xe^x dx+2a\int_0^1 x^2dx=1+\dfrac{2}{3}a$，解得 $a=3$，从而 $f(x)=e^x+6x$

又 $f'(x)=e^x+6>0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加，

故求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)=e+6$，最小值为 $f(0)=1$．

4. 方程 $\ln x=ax\ \ (a>0)$ 有几个实根．（12 分）

解：令 $f(x)=\ln x-ax$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a,\Rightarrow f'(\dfrac{1}{a})=0.$

当 $0<x<\dfrac{1}{a}$， $f'(x)>0,\ f(x)$ 单调递增，当 $\dfrac{1}{a}<x<+\infty$， $f'(x)<0,\ f(x)$ 单调递减。

又 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=-\infty=\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$，故 $f(x)$ 有最大值 $f(\dfrac{1}{a})=-\ln a-1$，

由此可见：当 $f(\frac{1}{a})=-\ln a-1>0$, 即 $a<e^{-1}$, $f(x)=0$ 有两个实根。

当 $f(\frac{1}{a})=-\ln a-1=0$, 即 $a=e^{-1}$, $f(x)=0$ 仅有一个实根。

当 $f(\frac{1}{a})=-\ln a-1<0$, 即 $a>e^{-1}$, $f(x)=0$ 无实根。

5. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$ 的和．（12 分）

解：令 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，则所求和为 $s(1)$，

又 $s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}(-1<x<1)$

从而 $s(x)=s(x)-s(0)=\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x,\quad (|x|<1)$

又 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的收敛域为 $-1\le x\le 1$，所以所求和 $s(1)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$

6. 在曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上求一点，使得该点的切平面过已知直线 $\frac{x-6}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{2z-1}{-2}$

解：令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$，则 $F_x=2x,\ F_y=4y,\ F_z=6z$。

椭球面在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面 π 的方程为

$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0$ 即 $x_0x+2y_0y+3z_0z=21$，

因 π 平面过已知直线 L，在此直线上取两点 $A(6,3,0.5),\ B(0,0,3.5)$，满足 π 的方程，

即有： $6x_0+6y_0+1.5z_0=21$， （1）

$z_0=2$， （2）

又因 $x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21$， （3）

解（1）（2）（3）得两个切点；$(3,0,2)$，$(1,2,2)$，故所求的切平面方程为

$x+2z=7$ 与 $x+4y+6z=21$。

7. 试求 $I=\int_L\sqrt{x^2+y^2}dx-y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})dy$，其中 L 为曲线 $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\ (x\ge 0)$ 上从点 $A(1,-2)$ 到点 $B(1,2)$ 的一段弧．（12 分）

解：添加线段 BA，设 $L+BA$ 所围的区域是 D，则根据格林公式：

$$I=\int_{L+BA}\sqrt{x^2+y^2}dx-y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})dy-\int_{BA}\sqrt{x^2+y^2}dx-y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})dy,$$

$$I=\iint_D \frac{-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy+\int_{-2}^{2}-y\ln(1+\sqrt{1+y^2})dy=0-0=0$$

其中第一个零是因为 D 是关于 x 轴对称的半圆盘，被积函数是关于 y 的奇函数，因此该二重积分为零，第二个定积分是利用被积函数是奇的，而积分区间端点是相反数，故也为零。

8. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{x^2+x}, & 1\le x\le 2,\ 0\le y\le x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\ge 2x\right\}$，

求 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ （12 分）

解：令 $D_1=\left\{(x,y)\middle| 1\le x\le 2, \sqrt{2x-x^2}\le y\le x\right\}$，

则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_1}\dfrac{y}{x^2+x}dxdy=\int_1^2\dfrac{dx}{x^2+x}\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x}ydy$

$$=\int_1^2\frac{x^2-x}{x^2+x}dx=\int_1^2\frac{x-1}{x+1}dx=\int_1^2(1-\frac{2}{x+1})dx=1-2\ln\frac{3}{2}$$

9. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶导数存在，$g(x)$ 为某一函数，且满足

$$f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0\,. \qquad (*)$$

试证：当 $f(a)=f(b)=0(a<b)$ 时，则在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 恒为零．(**10 分**)

证：根据最值定理，$f(x)$ 必在区间 $[a,b]$ 取得最值，假设最大值是 M，最小值是 m，

我们希望证明 $M=m=0$，若不然，即 $f(\xi)=M>0,\ \xi\in(a,b)$，则 $f'(\xi)=0$，

由方程（*）得 $f''(\xi)=f(\xi)>0$，即函数 $f(x)$ 在该点取得极小值，这与 $f(x)$ 取得最大值矛盾，

故有 M=0. 同理可得 m=0.