首届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案

（非数学类，2010）

1）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}$.

2）计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中$\sum$为下半球面$z=-\sqrt{a^2-y^2-x^2}$的上侧，$a$为大于 0 的常数.

3）现要设计一个容积为V的一个圆柱体的容器.已知上下两底的材料费为单位面积a元，而侧面的材料费为单位面积b元.试给出最节省的设计方案：即高与上下底的直径之比为何值时所需费用最少？

4）已知$f(x)$在$(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$内满足$f'(x)=\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}$，求$f(x)$.

解 1）记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}$，则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right).$$

$$=\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k+\frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2+o(\frac{1}{n})$$

$$\to\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$$

2） 将Σ（或分片后）投影到相应坐标平面上化为二重积分逐块计算。

$$I_1=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}axdydz=-2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}dydz$$

其中D_{yz}为yoz 平面上的半圆$y^2+z^2\le a^2,z\le 0$。利用极坐标，得

$$I_1=-2\int_{\pi}^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\ rdr=-\frac{2}{3}\pi a^3$$

$$I_2=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}(z+a)^2dxdy=\frac{1}{a}\iint\limits_{D_{xy}}[a-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}]^2dxdy,$$

其中D_{xy}为xoy 平面上的圆域$x^2+y^2\le a^2$。利用极坐标，得

$$I_2=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\left(2a^2-2a\sqrt{a^2-r^2}-r^2\right)rdr=\frac{\pi}{6}a^3。$$

因此，$I=I_1+I_2=-\frac{\pi}{2}a^3$。

3）设圆柱容器的高为h,上下底的径为r，则有

$\pi r^2h=V$,或 $h=\frac{V}{\pi r^2}$。

所需费用为$F(r)=2a\pi r^2+2b\pi rh=2a\pi r^2+\frac{2bV}{r}$

显然，$F^{'}(r)=4a\pi r-\frac{2bV}{r^2}$。

那么，费用最少意味着 $F^{'}(r)=0$，也即$r^3=\frac{bV}{2a\pi}$

这时高与底的直径之比为$\frac{h}{2r}=\frac{V}{2\pi r^3}=\frac{a}{b}$。

4） 由$\sin^3x+\cos^3x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{\pi}{4}-x)[1+2\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)]$得

$I=\sqrt{2}\int\frac{dx}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)[1+2\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)]}$，令$u=\frac{\pi}{4}-x$，得

$$I=-\sqrt{2}\int\frac{du}{\cos u(1+2\sin^2u)}=-\sqrt{2}\int\frac{d\sin u}{\cos^2u(1+2\sin^2u)}$$

$$\underline{\underline{令t=\sin u}}\quad -\sqrt{2}\int\frac{dt}{(1-t^2)(1+2t^2)}=-\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\int\frac{dt}{1-t^2}+\int\frac{2dt}{1+2t^2}\right]$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}t\right]+C$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{6}\ln\left|\frac{1+\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{1-\sin(\frac{\pi}{4}-x)}\right|-\frac{2}{3}\arctan(\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-x))+C。$$

二、求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n[(1+\frac{1}{n})^n-e]$；(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n$，其中$a>0,b>0,c>0$.

解 (1) 我们有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e=e^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}-e=e\left[e^{-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}-1\right]=e\left[\{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\}-1\right]=e\left[-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\right]$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty} n[(1+\frac{1}{n})^n - e] = -\frac{e}{2}$。

(2) 由泰劳公式有

$a^{1/n} = e^{\ln a/n} = 1+\frac{1}{n}\ln a + o(\frac{1}{n})\ (n\to+\infty)$,

$b^{1/n} = e^{\ln b/n} = 1+\frac{1}{n}\ln b + o(\frac{1}{n})\ (n\to+\infty)$

$c^{1/n} = e^{\ln c/n} = 1+\frac{1}{n}\ln c + o(\frac{1}{n})\ (n\to+\infty)$

因此，

$\frac{1}{3}\left(a^{1/n}+b^{1/n}+c^{1/n}\right) = 1+\frac{1}{n}\ln\sqrt[3]{abc} + o(\frac{1}{n})\ (n\to+\infty)$,

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n = \left[1+\frac{1}{n}\ln\sqrt[3]{abc}+o(\frac{1}{n})\right]^n.$$

令 $\alpha_n = \frac{1}{n}\ln\sqrt[3]{abc}+o(\frac{1}{n})$，上式可改写成

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n = \left[\left(1+\alpha_n\right)^{1/\alpha_n}\right]^{n\alpha_n}$$

显然，　$(1+\alpha_n)^{1/\alpha_n}\to e\ (n\to+\infty)$，　　$n\alpha_n \to \ln\sqrt[3]{abc}\ (n\to+\infty)$

所以，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n = \sqrt[3]{abc}.$$

三、设 $f(x)$ 在 $x=1$ 点附近有定义，且在 $x=1$ 点可导，并已知 $f(1)=0, f'(1)=2$.求

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}.$$

解　由题设可知：

$$\lim_{y\to 1}\frac{f(y)-f(1)}{y-1} = \lim_{y\to 1}\frac{f(y)}{y-1} = f'(1) = 2。$$

令 $y=\sin^2 x+\cos x$，那么当 $x\to 0$ 时，$y=\sin^2 x+\cos x\to 1$，

故由上式有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{\sin^2 x+\cos x-1} = 2$$

可见，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)}{x^2+x\tan x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(\sin^2x+\cos x)}{\sin^2x+\cos x-1}\times\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}\right)$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}=\frac{1}{2}$$

最后一步的极限可用常规的办法---洛比达法则或泰劳展开---求出。

四、设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，并且无穷积分 $\int_0^{\infty}f(x)dx$ 收敛.求 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)dx$.

解 设 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=l$，并令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 。

这时， $F^{'}(x)=f(x)$ ，并有 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=l$ 。

对于任意的 $y>0$，我们有

$$\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)dx=\frac{1}{y}\int_0^y xdF(x)=\frac{1}{y}xF(x)\Big|_{x=0}^{x=y}-\frac{1}{y}\int_0^y F(x)dx=F(y)-\frac{1}{y}\int_0^y F(x)dx$$

根据洛比达法则和变上限积分的求导公式，不难看出

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y F(x)dx=\lim_{y\to+\infty}F(y)=l$$

因此， $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)dx=l-l=0$ 。

五、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0)=f(1)=0,\ f(\frac{1}{2})=1$.证明：(1) 存在一个 $\xi\in(\frac{1}{2},1)$ 使得 $f(\xi)=\xi$；(2) 存在一个 $\eta\in(0,\xi)$ 使得 $f^{'}(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

证明 **(1)** 令 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且有

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0,\ F(1)=-1<0$$

所以，存在一个 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$ 。

(2) 令 $G(x)=e^{-x}[f(x)-x]$，那么 $G(0)=G(\xi)=0$ 。

这样，存在一个 $\eta\in(0,\xi)$，使得 $G^{'}(\eta)=0$，即

$G^{'}(\eta)=e^{-\eta}[f^{'}(\eta)-1]-e^{-\eta}[f(\eta)-\eta]=0$.

也即 $f^{'}(\eta)=f(\eta)-\eta+1$. 证毕。

六、设 $n>1$ 为整数，

$$F(x)=\int_0^x e^{-t}(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!})dt.$$

证明：方程 $F(x)=\frac{n}{2}$ 在 $(\frac{n}{2},n)$ 内至少有一个根.

证明：因为

$$e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}\right)<1,\ \forall t>0,$$

故有

$$F\left(\frac{n}{2}\right)=\int_0^{\frac{n}{2}} e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}\right)dt<\frac{n}{2}$$

下面只需证明 $F(n)>\frac{n}{2}$ 即可。 我们有

$$F(n)=\int_0^n e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}\right)dt=-\int_0^n\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}\right)de^{-t}$$

$$=1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}\right)+\int_0^n e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)dt$$

由此推出

$$F(n)=\int_0^n e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}\right)dt$$

$$=1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}\right)$$

$$+1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

$$+\ldots+1-e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}\right)+1-e^{-n}$$

记 $a_i=\dfrac{n^i}{i!}$，那么 $a_0=1<a_1<a_2<\ldots<a_n$ 。我们观察下面的方阵

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_0 & 2a_1 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & 2a_n \end{pmatrix}$$

整个矩阵的所有元素之和为

$$(n+2)(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)=(n+2)\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}\right)$$

基于上述观察，由（*）式我们便得到

$$F(n)>n+1-\frac{(2+n)}{2}e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}\right)$$

$>n+1-\dfrac{n+2}{2}=\dfrac{n}{2}$,证毕.

七、是否存在 $\mathbb{R}^1$ 中的可微函数 $f(x)$ 使得

$$f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5 \text{ ?}$$

若存在，请给出一个例子；若不存在，请给出证明.

解 不存在。

假设存在 $\mathbb{R}^1$ 中的可微函数 $f(x)$ 使得

$$f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5 \text{ 。}$$

考虑方程 $f(f(x))=x$,

即 $1+x^2+x^4-x^3-x^5=x$,

或 $(x-1)(x^4+x^2+1)=0$ 。

此方程有惟一实数根 $x=1$，即 $f(f(x))$ 有惟一不动点 $x=1$ 。

下面说明 $x=1$ 也是 $f(x)$ 的不动点。

事实上，令 $f(1)=t$，则 $f(t)=f(f(1))=1,\ f(f(t))=f(1)=t$，因此 $t=1$。如所需。

记 $g(x)=f(f(x))$，则一方面，$\left[g(x)\right]'=\left[f(f(x))\right]'\Rightarrow g'(1)=\left(f'(1)\right)^2\geq 0$；

另一方面，$g'(x)=\left(1+x^2+x^4-x^3-x^5\right)'=2x+4x^3-3x^2-5x^4$，从而 $g'(1)=-2$ 。矛盾。

所以，不存在$\mathbb{R}^1$中的可微函数$f(x)$使得$f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5$。证毕。

解法二：满足条件的函数不存在.

理由如下

首先，不存在$x_k\to+\infty$，使$f(x_k)$有界，否则$f(f(x_k))=1+x_k^2+x_k^4-x_k^3-x_k^5$有界，矛盾.

因此

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$.从而由连续函数的介值性有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$或$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim\limits_{y\to+\infty}f(y)=-\infty$，矛盾.

若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim\limits_{y\to-\infty}f(y)=+\infty$，矛盾.

因此，无论哪种情况都不可能.

八、设$f(x)$在$[0,\infty)$上一致连续，且对于固定的$x\in[0,\infty)$，当自然数$n\to\infty$时$f(x+n)\to0$.证明函数序列$\{f(x+n):n=1,2,\ldots\}$在$[0,1]$上一致收敛于0

证：由于$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续，故对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$使得

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\text{只要}\left|x_1-x_2\right|<\delta\ \ (x_1\ge0,x_2\ge0)$$

取一个充分大的自然数m，使得$m>\delta^{-1}$，并在$[0,1]$中取m个点:

$$x_1=0<x_2<\ldots<x_m=1,$$

其中$x_j=\dfrac{j}{m}\ \ (j=1,2,\ldots,m)$。这样，对于每一个$j$，

$$\left|x_{j+1}-x_j\right|=\frac{1}{m}<\delta。$$

又由于$\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$，故对于每一个$x_j$，存在一个$N_j$使得

$$\left|f(x_j+n)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\text{只要}n>N_j,$$

这里的ε是前面给定的。

令$N=\max\{N_1,\ldots,N_m\}$，那么

$$\left|f(x_j+n)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\text{只要}n>N,$$

其中 $j=1,2,\ldots,m$。 设 $x\in[0,1]$ 是任意一点，这时总有一个 x_j 使得 $x\in[x_j,x_{j+1}]$。

由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续性及 $\left|x-x_j\right|<\delta$ 可知，

$$\left|f(x_j+n)-f(x+n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\ \ (\forall n=1,2,\ldots)$$

另一方面，我们已经知道

$$\left|f(x_j+n)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\text{只要}n>N$$

这样，由后面证得的两个式子就得到

$$\left|f(x+n)\right|<\varepsilon,\text{只要}n>N,x\in[0,1]$$

注意到这里的 N 的选取与点 x 无关，这就证实了函数序列 $\{f(x+n):n=1,2,\ldots\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0.