首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷解答
（数学类，2009）

考试形式： 闭卷 　 考试时间： 120 分钟 　 满分： 100 分.

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满　分	15	20	15	10	10	15	15	100
得　分								

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.

2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.

专业：　年级：　所在院校：　身份证号：　姓名：

密　封　线

得　分	
评阅人	

一、（15 分）求经过三平行直线 $L_1: x=y=z$，$L_2: x-1=y=z+1$，$L_3: x=y+1=z-1$ 的圆柱面的方程.

解： 先求圆柱面的轴 L_0 的方程. 由已知条件易知，圆柱面母线的方向是 $\vec{n}=(1,1,1)$，且圆柱面经过点 $O(0,0,0)$，过点 $O(0,0,0)$ 且垂直于 $\vec{n}=(1,1,1)$ 的平面 π 的方程为：$x+y+z=0$. ……………………………（3 分)

π 与三已知直线的交点分别为 $O(0,0,0), P(1,0,-1), Q(0,-1,1)$ ………… （5 分)

圆柱面的轴 L_0 是到这三点等距离的点的轨迹，即

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+y^2+(z+1)^2 \\ x^2+y^2+z^2=x^2+(y+1)^2+(z-1)^2 \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} x-z=1 \\ y-z=-1 \end{cases}, \quad \text{………………………………………………（9 分)}$$

将 L_0 的方程改为标准方程

$$x-1=y+1=z.$$

圆柱面的半径即为平行直线 $x=y=z$ 和 $x-1=y+1=z$ 之间的距离. $P_0(1,-1,0)$

为 L_0 上的点. ……………………………………………………………… （12 分)

对圆柱面上任意一点 $S(x,y,z)$， 有 $\frac{|\vec{n}\times\overrightarrow{P_0S}|}{|\vec{n}|}=\frac{|\vec{n}\times\overrightarrow{P_0O}|}{|\vec{n}|}$， 即

$$(-y+z-1)^2+(x-z-1)^2+(-x+y+2)^2=6,$$

所以，所求圆柱面的方程为：

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz-3x+3y=0. \quad ………………\quad (15\text{ 分})$$

得　分	
评阅人	

二、（20 分）设 $C^{n\times n}$ 是 $n\times n$ 复矩阵全体在通常的运算下所构成的复数域 C 上的线性空间，$F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$.

（1）假设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，若 $AF=FA$，证明：

$$A=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E;$$

（2）求 $C^{n\times n}$ 的子空间 $C(F)=\left\{X\in C^{n\times n}\mid FX=XF\right\}$ 的维数.

（1）的证明: 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$， $M=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E$.要证明 $M=A$，只需证明 A 与 M 的各个列向量对应相等即可.若以 e_i 记第 i 个基本单位列向量.于是，只需证明：对每个 i， $Me_i=Ae_i(=\alpha_i)$. ……………………… （2 分)

若记 $\beta=(-a_n,-a_{n-1},\cdots,-a_1)^T$， 则 $F=(e_2,e_3,\cdots,e_n,\beta)$.注意到，

$$Fe_1=e_2,F^2e_1=Fe_2=e_3,\cdots,F^{n-1}e_1=F(F^{n-2}e_1)=Fe_{n-1}=e_n \qquad (*) \quad ….. \ (6\text{ 分})$$

由

$$\begin{aligned} Me_1&=(a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E)e_1 \\ &=a_{n1}F^{n-1}e_1+a_{n-11}F^{n-2}e_1+\cdots+a_{21}Fe_1+a_{11}Ee_1 \\ &=a_{n1}e_n+a_{n-11}e_{n-1}+\cdots+a_{21}e_2+a_{11}e_1 \\ &=\alpha_1=Ae_1 \text{……………………………………(10分)} \end{aligned}$$

知 $Me_2=MFe_1=FMe_1=FAe_1=AFe_1=Ae_2$

$$Me_3 = MF^2e_1 = F^2Me_1 = F^2Ae_1 = AF^2e_1 = Ae_3$$

……………

$$Me_n = MF^{n-1}e_1 = F^{n-1}Me_1 = F^{n-1}Ae_1 = AF^{n-1}e_1 = Ae_n$$

所以，$M = A$.　　　　　　　　　　　…………………………..（14 分)

（2）解：由（1），$C(F) = span\{E, F, F^2, \cdots, F^{n-1}\}$，…………（16 分)

设 $x_0E + x_1F + x_2F^2 + \cdots + x_{n-1}F^{n-1} = O$，等式两边同右乘 e_1，利用（*）得

$$\theta = Oe_1 = (x_0E + x_1F + x_2F^2 + \cdots + x_{n-1}F^{n-1})e_1$$

$$= x_0Ee_1 + x_1Fe_1 + x_2F^2e_1 + \cdots + x_{n-1}F^{n-1}e_1$$

$$= x_0e_1 + x_1e_2 + x_2e_3 + \cdots + x_{n-1}e_n$$ ....(18分）

因 $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$ 线性无关，故，$x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$ …………（19 分)

所以，$E, F, F^2, \cdots, F^{n-1}$ 线性无关.因此，$E, F, F^2, \cdots, F^{n-1}$ 是 $C(F)$ 的基，特别地，

$\dim C(F) = n$.　　　　　　　　　　　　……………………………（20 分)

得　分	
评阅人	

三、（15 分）假设 V 是复数域 C 上 n 维线性空间（$n > 0$），f, g 是 V 上的线性变换.如果 $fg - gf = f$，证明：f 的特征值都是 0，且 f, g 有公共特征向量.

证明：假设 λ_0 是 f 的特征值，W 是相应的特征子空间，即 $W = \{\eta \in V \mid f(\eta) = \lambda_0\eta\}$.于是，$W$ 在 f 下是不变的. …………………………（1 分)

下面先证明，λ_0 =0.任取非零 $\eta \in W$，记 m 为使得 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^m(\eta)$ 线性相关的最小的非负整数，于是，当 $0 \le i \le m-1$ 时，$\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^i(\eta)$ 线性无关…..（2 分)

$0 \le i \le m-1$ 时令 $W_i = span\{\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^{i-1}(\eta)\}$,其中，$W_0 = \{\theta\}$.因此，$\dim W_i = i$（$1 \le i \le m$），并且，$W_m = W_{m+1} = W_{m+2} = \cdots$. 显然，$g(W_i) \subseteq W_{i+1}$，特别地，$W_m$ 在 g 下是不变的.　　　　　　　　……………………………（4 分)

下面证明，W_m 在 f 下也是不变的.事实上，由 $f(\eta) = \lambda_0\eta$，知

$$fg(\eta) = gf(\eta) + f(\eta) = \lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta$$ …………（5 分)

$$
\begin{aligned}
fg^2(\eta) &= gfg(\eta) + fg(\eta) \\
&= g(\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0 \eta) + (\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0 \eta) \\
&= \lambda_0 g^2(\eta) + 2\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0 \eta
\end{aligned}
$$
............................(6分）

根据

$$
\begin{aligned}
fg^k(\eta) &= gfg^{k-1}(\eta) + fg^{k-1}(\eta) \\
&= g(fg^{k-1})(\eta) + fg^{k-1}(\eta)
\end{aligned}
$$

用归纳法不难证明，$fg^k(\eta)$ 一定可以表示成 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^k(\eta)$ 的线性组合，且表示式中 $g^k(\eta)$ 前的系数为 λ_0. ……………………………………（8分)

因此，W_m 在 f 下也是不变的，f 在 W_m 上的限制在基 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^{m-1}(\eta)$ 下的矩阵是上三角矩阵，且对角线元素都是 λ_0，因而，这一限制的迹为 $m\lambda_0$. …..（10 分)

由于 $fg - gf = f$ 在 W_m 上仍然成立，而 $fg - gf$ 的迹一定为零，故 $m\lambda_0 = 0$，即 λ_0=0. ……………………………..（12 分)

任取 $\eta \in W$，由于 $f(\eta) = \theta$，$fg(\eta) = gf(\eta) + f(\eta) = g(\theta) + f(\eta) = \theta$，所以，$g(\eta) \in W$.因此，W 在 g 下是不变的.从而，在 W 中存在 g 的特征向量，这也是 f, g 的公共特征向量. …………………………………（15 分)

得　分	
评阅人	

四、（10 分）设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的无穷次可微的函数序列且逐点收敛，并在 $[a,b]$ 上满足 $|f_n'(x)| \le M$.（1）证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛；（2）设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$，问 $f(x)$ 是否一定在 $[a,b]$ 上处处可导,为什么？

证明：（1）$\forall \varepsilon > 0$，将区间 $[a,b]$ K 等分，分点为 $x_j = a + \dfrac{j(b-a)}{K}$，$j = 0,1,2,\cdots,K$，使得 $\dfrac{b-a}{K} < \varepsilon$. 由于 $\{f_n(x)\}$ 在有限个点 $\{x_j\}$, $j = 0,1,2,\cdots,K$ 上收敛,因此 $\exists N$，$\forall m > n > N$，使得 $|f_m(x_j) - f_n(x_j)| < \varepsilon$ 对每个 $j = 0,1,2,\cdots,K$ 成立. ……………………………..（3 分)

于是 $\forall x \in [a,b]$，设 $x \in [x_j, x_{j+1}]$，则

$$
|f_m(x) - f_n(x)| \le |f_m(x) - f_m(x_j)| + |f_m(x_j) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f_n(x)|,
$$

$$=\left|f_m'(\xi)(x-x_j)\right|+\left|f_m(x_j)-f_n(x_j)\right|+\left|f_n'(\eta)(x-x_j)\right|<(2M+1)\varepsilon .$$ …（5 分）

（2）不一定. ……………………………（6 分）

令 $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$，则 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上不能保证处处可导.（10 分）

得　分	
评阅人	

五、（10 分）设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\dfrac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt$， 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 发散.

解： $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt=\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt+\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt=I_1+I_2$$ …….（3 分）

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt<n^3\int_0^{\frac{\pi}{n}}tdt=\frac{\pi^2n}{2},$$ ………………………（5 分）

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt<\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\left(\frac{\pi}{2t}\right)^3dt=-\frac{\pi^3}{8}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}d\left(\frac{1}{t}\right)$$ ………..(7 分)

$$=\frac{\pi^3}{8}\left(\frac{n}{\pi}-\frac{2}{\pi}\right)<\frac{\pi^2n}{8}.$$ …………..（8 分）

因此 $\dfrac{1}{a_n}>\dfrac{1}{\pi^2n}$，由此得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 发散. ……………………（10 分）

得　分	
评阅人	

六、（15 分） $f(x,y)$ 是 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上二次连续可微函数，满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2y^2$，计算积分

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy.$$

解： 采用极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$I=\int_0^1dr\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)rd\theta=\int_0^1dr\int_{x^2+y^2=r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dy-\frac{\partial f}{\partial y}dx\right)$$ …..(6 分)

$$=\int_0^1dr\iint_{x^2+y^2\le r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial y^2}\right)dxdy=\int_0^1dr\iint_{x^2+y^2\le r^2}\left(x^2y^2\right)dxdy$$ …….（10 分）

$$=\int_0^1 dr\int_0^r \rho^5 d\rho\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta=\frac{\pi}{168}.$$ ……………….(15 分)

得　分	
评阅人	

七、（15 分））假设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，在 $(0,\ 1)$ 内二阶可导，过点 $A(0,\ f(0))$，与点 $B(1,\ f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,\ f(c))$，其中 $0<c<1$. 证明：在 $(0,\ 1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

证明：因为 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上满足 *Lagrange* 中值定理的条件，故存在 $\xi_1\in(0,\ c)$，使 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}$. ………………………………………………………………… （4 分)

由于 C 在弦 AB 上，故有

$$\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0).$$ ……………………………………….. （7 分)

从而 $f'(\xi_1)=f(1)-f(0)$. ……………………………………………...………..……….. (8 分)

同理可证，存在 $\xi_2\in(c,\ 1)$，使 $f'(\xi_2)=f(1)-f(0)$. ……………………….…….. (11 分)

由 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，知 在 $[\xi_1,\ \xi_2]$ 上 $f'(x)$ 满足 *Rolle* 定理的条件，所以存在 $\xi\in(\xi_1,\ \xi_2)\subset(0,\ 1)$，使 $f''(\xi)=0$. ……………………………………………………..…….(15 分)

第二届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案
(数学类)

一、**(10分)** 设 $\varepsilon \in (0,1)$, $x_0 = a$, $x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$. 证明: $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在, 且 ξ 为方程 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的唯一根.

证明: 注意到 $|(\sin x)'| = |\cos x| \le 1$, 由中值定理, 我们有

$$|\sin x - \sin y| \le |x - y|, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

....(2 分)

所以

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |\varepsilon(\sin x_{n+1} - \sin x_n)| \le \varepsilon |x_{n+1} - x_n|, \qquad n = 0,1,2,\ldots.$$

....(4 分)

从而可得

$$|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon^n |x_1 - x_0|, \qquad \forall\, n = 0,1,2,\ldots.$$

于是级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛, 从而 $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在.

....(6 分)

对于递推式 $x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$ 两边取极限即得 ξ 为 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的根.

....(8 分)

进一步, 设 η 也是 $x - \varepsilon \sin x = a$, 即 $\eta - \varepsilon \sin \eta = a$ 的根, 则

$$|\xi - \eta| = \varepsilon |\sin \xi - \sin \eta| \le \varepsilon |\xi - \eta|.$$

所以由 $\varepsilon \in (0,1)$ 可得 $\eta = \xi$. 即 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的根唯一. 证毕

....(10 分)

□

二、**(15 分)** 设 $B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 2010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 证明 $X^2 = B$ 无解, 这里 X 为三阶未知复方阵.

证明: 反证法. 设方程有解, 即存在复矩阵 A 使得 $A^2 = B$.

....(2 分)

我们注意到 B 的特征值为 0, 且其代数重数为 3.

....(4 分)

设 λ 为 A 的一个特征值, 则 λ^2 为 B 的特征值. 所以 $\lambda = 0$. 从而 A 的特征值均为 0.

....(6 分)

于是 A 的 Jordan 标准型只可能为$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 或 $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

....(10 分)

从而 A^2 的 Jordan 标准型只能为 $J_1 = J_1^2 = J_2^2$ 或 $J_2 = J_3^2$.

....(12 分)

因此 A^2 的秩不大于 1, 与 $B = A^2$ 的秩为 2 矛盾.

所以 $X^2 = B$ 无解. 证毕.

....(15 分)

$\square$

三、**(10 分)** 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是凸区域, 函数 $f(x, y)$ 是凸函数. 证明或否定: $f(x, y)$ 在 D 上连续.

注: 函数 $f(x, y)$ 为凸函数的定义是 $\forall \alpha \in (0, 1)$ 以及 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, 成立

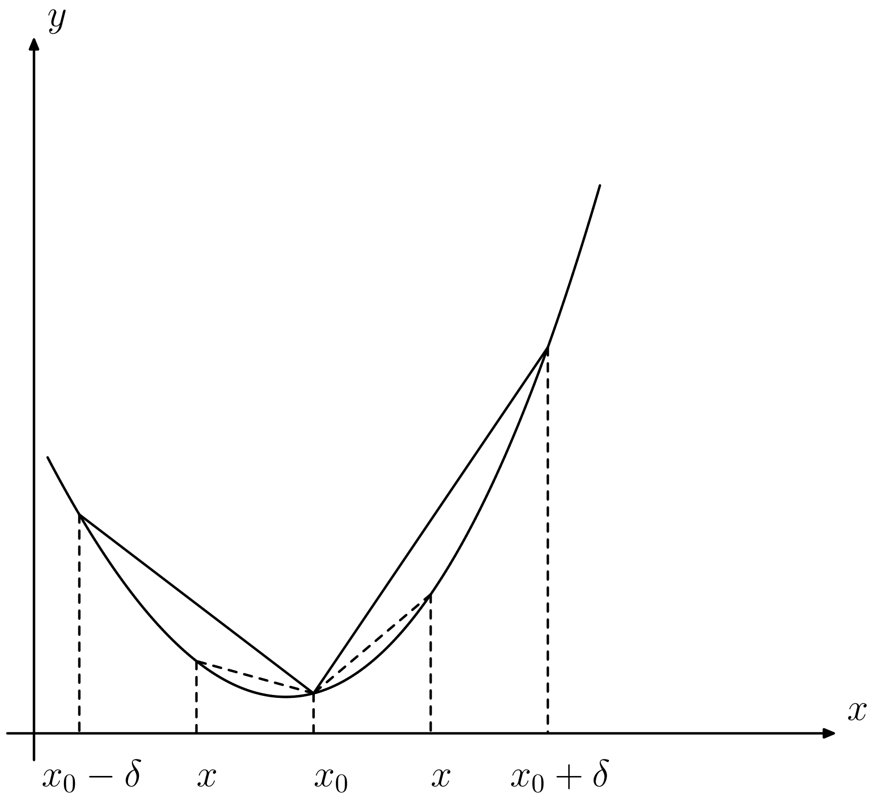
$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) \leq \alpha f(x_1, y_1) + (1-\alpha) f(x_2, y_2).$$

证明: 结论成立. 我们分两步证明结论.

(i) 对于 $\delta > 0$ 以及 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上的一元凸函数 $g(x)$, 容易验证 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:

$$\frac{g(x_0) - g(x_0 - \delta)}{d} \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{g(x_0 + \delta) - g(x_0)}{\delta}.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(2 分)



从而

$$\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right| \le \left|\frac{g(x_0+\delta)-g(x_0)}{\delta}\right|+\left|\frac{g(x_0)-g(x_0-\delta)}{\delta}\right|, \qquad \forall\, x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

由此即得 $g(x)$ 在 x_0 连续. 一般地, 可得开区间上的一元凸函数连续.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(4 分)

(ii) 设 $(x_0,y_0)\in D$. 则有 $\delta>0$ 使得

$$E_\delta \equiv [x_0-\delta,x_0+\delta]\times[y_0-\delta,y_0+\delta]\subset D.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(5 分)

注意到固定 x 或 y 时, $f(x,y)$ 作为一元函数都是凸函数, 由 (i) 的结论, $f(x,y_0), f(x,y_0+\delta), f(x,y_0-\delta)$ 都是 $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上的连续函数, 从而它们有界, 即存在常数 $M_\delta>0$ 使得

$$\begin{aligned} & \frac{|f(x,y_0+\delta)-f(x,y_0)|}{\delta}+\frac{|f(x,y_0)-f(x,y_0-\delta)|}{\delta} \\ & +\frac{|f(x_0+\delta,y_0)-f(x_0,y_0)|}{\delta}+\frac{|f(x_0,y_0)-f(x_0-\delta,y_0)|}{\delta} \\ \le\ & M_\delta, \qquad\qquad \forall\, x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]. \end{aligned}$$

....(7 分)

进一步, 由 (i) 的结论, 对于 $(x,y)\in E_\delta$,

$$
\begin{aligned}
&|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\\
\le\ & |f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\
\le\ & \Big(\frac{|f(x,y_0+\delta)-f(x,y_0)|}{\delta}+\frac{|f(x,y_0)-f(x,y_0-\delta)|}{\delta}\Big)|y-y_0|\\
&+\Big(\frac{|f(x_0+\delta,y_0)-f(x_0,y_0)|}{\delta}+\frac{|f(x_0,y_0)-f(x_0-\delta,y_0)|}{\delta}\Big)|x-x_0|\\
\le\ & M_\delta|y-y_0|+M_\delta|x-x_0|.
\end{aligned}
$$

于是 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 证毕.

....(10 分)

□

四、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 在 $x=1$ 可导, $f(1)=0$, $f'(1)=a$. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\int_0^1 x^n f(x)\,dx=-a.$$

证明: 记 $M=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|<+\infty$. 令 $r(x)=f(x)-f(1)-f'(1)(x-1)=f(x)-a(x-1)$. 则由 Peano 型的 Taylor 展式可得 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta\in(0,1)$, 使得当 $\delta<x\le1$ 时,

$$|r(x)|\le\varepsilon(1-x).$$

....(2 分)

我们有

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^n f(x)\,dx &= \int_0^\delta x^n f(x)\,dx+\int_\delta^1 ax^n(x-1)\,dx+\int_\delta^1 x^n r(x)\,dx\\
&= R_1+R_2+R_3.
\end{aligned}
$$

....(4 分)

注意到

$$|R_1|\le M\int_0^\delta x^n\,dx=M\frac{\delta^{n+1}}{n+1},$$

$$R_2=-\frac{a}{(n+1)(n+2)}+a\Big(\frac{\delta^{n+1}}{n+1}-\frac{\delta^{n+2}}{n+2}\Big)$$

以及

$$\begin{aligned}|R_3| &\le \int_\delta^1 x^n\,|r(x)|\,dx \le \varepsilon\int_\delta^1 x^n(1-x)\,dx\\ &\le \varepsilon\int_0^1 x^n(1-x)\,dx=\frac{\varepsilon}{(n+1)(n+2)},\end{aligned}$$

我们有

$$\lim_{n\to+\infty}|n^2R_1|=0,$$

$$\lim_{n\to+\infty}|n^2R_2+a|=0$$

以及

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,|n^2R_3|\le\varepsilon.$$

....(8 分)

所以

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|n^2\int_0^1 x^nf(x)\,dx+a\right|\le\varepsilon.$$

由上式及 $\varepsilon>0$ 的任意性即得

$$\lim_{n\to+\infty}n^2\int_0^1 x^nf(x)\,dx=-a.$$

证毕.

....(10 分)

□

五、(15 分) 已知二次曲面 Σ (非退化)过以下九点：$A(1,0,0)$, $B(1,1,2)$, $C(1,-1,-2)$, $D(3,0,0)$, $E(3,1,2)$, $F(3,-2,-4)$, $G(0,1,4)$, $H(3,-1,-2)$, $I(5,2\sqrt{2},8)$. 问 Σ 是哪一类曲面?

解答: 易见, A、B、C 共线, D、E、F 共线.

....(6 分)

而只有两种二次曲面上可能存在共线的三点: 单叶双曲面和双曲抛物面.

....(10 分)

然后，可以看到直线 ABC 和直线 DEF 是平行的，且不是同一条直线.

....(12 分)

这就又排除了双曲抛物面的可能(双曲抛物面的 同族直母线都异面，不同族直母线都相交), 所以只可能是单叶双曲面.

....(15 分)

注: 这个曲面其实是(不要求学生写出方程式)

$$(x-2)^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1.$$

六、(20 分) 设 A 为 $n\times n$ 实矩阵(未必对称), 对任一 n 维实向量 $\alpha\equiv(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha A\alpha^\top\geq 0$ (这里 $\alpha^\top$ 表示 α 的转置), 且存在 n 维实向量 β, 使得 $\beta A\beta^\top=0$, 同时对任意 n 维实向量 x 和 y, 当 $xAy^\top\neq 0$ 时有 $xAy^\top+yAx^\top\neq 0$. 证明: 对任意 n 维实向量 v, 都有 $vA\beta^\top=0$.

证明: 取任意实数 r, 由题设知

$$(v+r\beta)A(v+r\beta)^\top\geq 0.$$

....(8 分)

即

$$vAv^\top+rvA\beta^\top+r\beta Av^\top+r^2\beta A\beta^\top\geq 0.$$

....(12 分)

亦即

$$vAv^\top+r\Big(vA\beta^\top+\beta Av^\top\Big)+r^2\beta A\beta^\top\geq 0.$$

....(14 分)

若 $vA\beta^\top\neq 0$, 则有 $vA\beta^\top+\beta Av^\top\neq 0$. 因此可取适当的实数 r 使得

$$vAv^\top+r\Big(vA\beta^\top+\beta Av^\top\Big)+r^2\beta A\beta^\top<0.$$

盾. 证毕.

....(20 分)

□

七、(10 分) 设 f 在区间 $[0,1]$ 上Riemann 可积, $0\leq f\leq 1$. 求证: 对任何 $\varepsilon>0$, 存在只取值 $0,1$ 的分段(段数有限)常值函数 $g(x)$, 使得 $\forall\,[\alpha,\beta]\subseteq[0,1]$,

$$\Big|\int_\alpha^\beta\big(f(x)-g(x)\big)\,dx\Big|<\varepsilon.$$

证明: 取定 $n > \frac{2}{\varepsilon}$. 定义 $A_m = \Big[\dfrac{m}{n}, \dfrac{m}{n} + \displaystyle\int_{\frac{m}{n}}^{\frac{m+1}{n}} f(t)\,dt\Big)$,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \displaystyle\bigcup_{m=0}^{n-1} A_m, \\ 0, & x \notin \displaystyle\bigcup_{m=0}^{n-1} A_m. \end{cases}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(5 分)

对于 $0 \le \alpha < \beta \le 1$, 设非负整数 $k \le \ell$ 满足 $\dfrac{k}{n} \le \alpha < \dfrac{k+1}{n}$, $\dfrac{\ell}{n} \le \beta < \dfrac{\ell+1}{n}$, 则

$$\begin{aligned} & \Big|\int_\alpha^\beta \big(f(x) - g(x)\big)\,dx\Big| \\ \le\ & \int_\alpha^{\frac{k+1}{n}} |f(x) - g(x)|\,dx + \Big|\int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{\ell}{n}} \Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx\Big| + \int_{\frac{\ell}{n}}^\beta |f(x) - g(x)|\,dx \\ \le\ & \int_\alpha^{\frac{k+1}{n}} 1\,dx + 0 + \int_{\frac{\ell}{n}}^\beta 1\,dx \\ \le\ & \frac{2}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

证毕.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(10 分)

$\square$

八、(10 分) 已知 $\varphi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 是一个严格单调下降的连续函数, 满足

$$\lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = +\infty.$$

若

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \varphi^{-1}(t)\,dt = a < +\infty,$$

其中 φ^{-1} 表示 φ 的反函数. 求证:

$$\int_0^{+\infty} [\varphi(t)]^2\,dt + \int_0^{+\infty} [\varphi^{-1}(t)]^2\,dt \ge \frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}}.$$

证明: 令 $P = \int_p^{+\infty} \varphi(t)\,dt$, $Q = \int_q^{+\infty} \varphi^{-1}(t)\,dt$, $I = a - P - Q$, 其中 $pq = a$.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(2 分)

则

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\Big(\varphi^{-1}(t)\Big)^2\,dt\ge\int_0^q\Big(\varphi^{-1}(t)\Big)^2\,dt\\ \ge\;&\frac{1}{q}\Big(\int_0^q\varphi^{-1}(t)\,dt\Big)^2=\frac{1}{q}(a-Q)^2=\frac{1}{q}(I+P)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\Big(\varphi(t)\Big)^2\,dt\ge\int_0^p\Big(\varphi(t)\Big)^2\,dt\\ \ge\;&\frac{1}{p}\Big(\int_0^p\varphi(t)\,dt\Big)^2=\frac{1}{p}(a-P)^2=\frac{1}{p}(I+Q)^2.\end{aligned}$$

....(6 分)

因此,

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\Big(\varphi(t)\Big)^2\,dt+\int_0^{+\infty}\Big(\varphi^{-1}(t)\Big)^2\,dt\\ \ge\;&\frac{1}{p}(I+Q)^2+\frac{1}{q}(I+P)^2\\ \ge\;&\frac{2}{\sqrt{pq}}(I+P)(I+Q)=\frac{2}{\sqrt{a}}\Big(QP+aI\Big).\end{aligned}$$

....(8 分)

易见可取到适当的 p,q 满足 $P=Q=\dfrac{a-I}{2}$, 从而

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\Big(\varphi(t)\Big)^2\,dt+\int_0^{+\infty}\Big(\varphi^{-1}(t)\Big)^2\,dt\\ \ge\;&\frac{1}{a}\Big(\frac{(a-I)^2}{4}I+aI\Big)=\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{(a+I)^2}{4}\ge\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

证毕.

....(10 分)

□

第三届中国大学生数学竞赛赛区赛

试题参考答案

(数学类, 2011)

一、 (本题 15 分) 已知四点 $A(1,2,7)$, $B(4,3,3)$, $(5,-1,6)$, $(\sqrt{7},\sqrt{7},0)$. 试求过这四点的球面方程.

解答: 设所求球面的球心为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, 则

$$\begin{aligned} & (\bar{x}-1)^2+(\bar{y}-2)^2+(\bar{z}-7)^2 \\ = \ & (\bar{x}-4)^2+(\bar{y}-3)^2+(\bar{z}-3)^2 \\ = \ & (\bar{x}-5)^2+(\bar{y}+1)^2+(\bar{z}-6)^2 \\ = \ & (\bar{x}-\sqrt{7})^2+(\bar{y}-\sqrt{7})^2+\bar{z}^2. \end{aligned}$$

. . . . (8 分)

即

$$\begin{cases} 3\bar{x}+\bar{y}-4\bar{z}=-10, \\ 4\bar{x}-3\bar{y}-\bar{z}=4, \\ (\sqrt{7}-1)\bar{x}+(\sqrt{7}-2)\bar{y}-7\bar{z}=-20. \end{cases}$$

. . . . (10 分)

解得 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(1,-1,3)$. 而 . . . . (14 分)

$$(\bar{x}-1)^2+(\bar{y}-2)^2+(\bar{z}-7)^2=25.$$

于是所求球面方程为

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25.$$

. . . . (15 分)

二、(本题 10 分) 设 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数. 求证: 存在 $\xi \in [0,1]$, 使得

$$\prod_{k=1}^{n} f_k(\xi) \le \prod_{k=1}^{n} \int_0^1 f_k(x)\, dx.$$

证明: 记

$$a_k = \int_0^1 f_k(x)\, dx, \qquad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n.$$

当某个 $a_k = 0$ 时, 结论是平凡的. .... (1 分)

下设 $a_k > 0$ $(\forall\, k = 1, 2, \ldots, n)$. 我们有

$$\int_0^1 \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{a_k}}\, dx \le \int_0^1 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{a_k}\, dx = 1.$$

.... (8 分)

由此立即可得存在 $\xi \in [0,1]$ 使得

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(\xi)}{a_k}} \le 1.$$

结论得证. .... (10 分)

□

三、 (本题 15 分) 设 F^n 是数域 F 上的 n 维列空间, $\sigma : F^n \to F^n$ 是一个线性变换. 若 $\forall A \in M_n(F)$, $\sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha)$, $(\forall \alpha \in V)$, 证明: $\sigma = \lambda \cdot \mathrm{id}_{F^n}$, 其中 λ 是 F 中某个数, id_{F^n} 表示恒同变换.

证明: 设 σ 在 F^n 的标准基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 B, 则 $\sigma(\alpha) = B\alpha\,(\forall \alpha \in F^n)$. .... (5 分)

由条件: $\forall A \in M_n(F), \sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha), \forall \alpha \in F^n$, 有 $BA\alpha = AB\alpha, \forall \alpha \in F^n$. 故 $AB = BA$, $(\forall A \in M_n(F))$ .... (10 分)

设 $B = (b_{ij})$, 取 $A = \operatorname{diag}(1, \cdots, 1, c, 1, \cdots, 1)$, 其中 $c \neq 0, 1$, 由 $AB = BA$ 可得 $b_{ij} = 0, \forall i \neq j$. 又取 $A = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$, 这里 E_{st} 是 $(s\ t)-$ 位置为 1 其它位置为 0 的矩阵.则由 $AB = BA$ 可得 $a_{ii} = a_{jj}$, $(\forall i, j)$. 取 $\lambda = a_{11}$. 故 $B = \lambda I_n$, 从而 $\sigma = \lambda \cdot \mathrm{id}_{F^n}$ .... (15 分)

四、（本题 10 分）对于 ΔABC, 求 $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 的最大值.

解答: 三角形三个角 A,B,C 的取值范围为

$$(A,B,C)\in D\equiv\{(\alpha,\beta,\gamma)|\alpha+\beta+\gamma=\pi,\alpha>0,\beta>0,\gamma>0\}.$$

我们首先考虑 $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 在 D 的闭包

$$E=\{(\alpha,\beta,\gamma)|\alpha+\beta+\gamma=\pi,\alpha\geq 0,\beta\geq 0,\gamma\geq 0\}$$

上的最大值. .... (1 分)

我们有

$$\begin{aligned}
&\max_{(A,B,C)\in E}(3\sin A+4\sin B+18\sin C)\\
=&\max_{\substack{A+C\leq\pi\\A,C\geq 0}}(3\sin A+4\sin(A+C)+18\sin C)\\
=&\max_{0\leq C\leq\pi}\max_{0\leq A\leq\pi-C}\Big((3+4\cos C)\sin A++4\sin C\cos A+18\sin C\Big)\\
=&\max_{0\leq C\leq\pi}\left(\sqrt{(3+4\cos C)^2+16\sin^2 C}+18\sin C\right)\\
=&\max_{0\leq C\leq\pi}(\sqrt{25+24\cos C}+18\sin C).
\end{aligned}$$

.... (4 分)

考虑

$$f(C)=\sqrt{25+24\cos C}+18\sin C,\qquad 0\leq C\leq\pi.$$

易见

$$f(C)\geq f(\pi-C),\qquad\forall\, C\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

.... (5 分)

直接计算得

$$f'(C)=18\cos C-\frac{12\sin C}{\sqrt{25+24\cos C}}.$$

.... (6 分)

计算得 $f'(C)=0$ 等价于

$$(8\cos C-1)(27\cos^2 C+32\cos C+4)=0.$$

从而它在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 的解为 $C=\arccos\frac{1}{8}$. .... (7 分)

于是

$$\begin{aligned}&\max_{0\le C\le\pi} f(C)=\max_{0\le C\le\frac{\pi}{2}} f(C)=\max\left\{f(\arccos\frac{1}{8}),f(0),f(\frac{\pi}{2})\right\}\\ =&\max\left\{\frac{35\sqrt{7}}{4},7,23\right\}=\frac{35\sqrt{7}}{4}.\end{aligned}$$

.... (8 分)

由此可得

$$\max_{(A,B,C)\in E}(3\sin A+4\sin B+18\sin C)=\frac{35\sqrt{7}}{4},$$

另一方面, 不难看到 $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 在 E 的边界上 $(A,B,C$ 之一为零$)$ 的最大值为 22. .... (9 分)

所以所求最大值为 $\frac{35\sqrt{7}}{4}$. .... (10 分)

五、 (本题 15 分) 对于任何实数 α, 求证存在取值于 $\{-1,1\}$ 的数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 满足

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}\right)=\alpha.$$

证明: 由 Taylor 展式, $\forall\, x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, 存在 $\xi\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 使得

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}}.$$

…………………………………………………………………… (1 分)

从而

$$\left|\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)\right|\leq x^2,\qquad \forall\, x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}].$$

…………………………………………………………………… (2 分)

于是当 $n\geq 2$ 时, 不管我们怎么选取只取值 ± 1 的数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$, 均有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\left|\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2\sqrt{n}}\right|\\
=\;&\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\sqrt{1+\frac{a_k}{n}}-\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{a_k}{2n})\right|\\
\leq\;&\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{n}\right)^2\leq\frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

…………………………………………………………………… (5 分)

可以有很多种方法选取只取值 ± 1 的数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2\sqrt{n}}=\alpha.$$

此时就成立

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}\right)=\alpha.$$

…………………………………………………………………… (6 分)

例如, 我们可以按以下方式选取: 取 $a_1=1$, 依次定义

$$a_{n+1}=\begin{cases}1, & 如果 \sum_{k=1}^{n} a_k<2\alpha\sqrt{n},\\ -1, & 如果 \sum_{k=1}^{n} a_k\geq 2\alpha\sqrt{n}.\end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (10 分)

记

$$y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad n=1,2,\ldots.$$

我们有

$$-\sqrt{n}\leq y_n\leq\sqrt{n}.$$

若 $y_n>2\alpha$, 我们有

$$\begin{aligned} y_{n+1}-y_n &= \frac{y_n\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}-y_n \\ &= -\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+y_n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}, \end{aligned}$$

这时

$$-\frac{2}{\sqrt{n+1}}<y_{n+1}-y_n<0;$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (12 分)

而当 $y_n<2\alpha$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} y_{n+1}-y_n &= \frac{y_n\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}}-y_n \\ &= \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-y_n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}; \end{aligned}$$

这时

$$0<y_{n+1}-y_n<\frac{2}{\sqrt{n+1}};$$

于是当 $y_{n+1}-2\alpha$ 和 $y_n-2\alpha$ 同号时,

$$|y_{n+1}-2\alpha|\leq|y_n-2\alpha|,$$

而当 $y_{n+1}-2\alpha$ 和 $y_n-2\alpha$ 异号时,

$$|y_{n+1}-2\alpha|\le|y_{n+1}-y_n|\le\frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

一般地有

$$|y_{n+1}-2\alpha|\le\max(|y_n-2\alpha|,\frac{2}{\sqrt{n+1}}).$$

.... (14 分)

注意到对任何 $N>0$, 总有 $m\ge N$, 使得 $y_{m+1}-2\alpha$ 和 $y_m-2\alpha$ 异号. 由上面的讨论可得到

$$|y_k-2\alpha|\le\frac{2}{\sqrt{m+1}}\le\frac{2}{\sqrt{N+1}},\qquad\forall\,k=m+1,m+2,\ldots.$$

因此, $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=2\alpha$. .... (15 分)

□

六、 (本题 20 分) 设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵. 证明: A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是可逆矩阵, C 是幂零阵, 即存在 m 使得 $C^m = 0$.

证明: 设 V 是 F上 n 维线性空间, σ 是 V 上线性变换, 它在 V 的一组基下的矩阵为 A. 下面证明存在 $\sigma-$不变子空间 V_1, V_2 满足 $V = V_1 \oplus V_2$, 且 $\sigma|_{V_1}$ 是同构，$\sigma|_{V_2}$ 是幂零变换.

首先有子空间升链: $\operatorname{Ker}\sigma \subseteq \operatorname{Ker}\sigma^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker}\sigma^k \subseteq \cdots$ 从而存在正整数 m 使得 $\operatorname{Ker}\sigma^m = \operatorname{Ker}\sigma^{m+i}$, $(i = 1, 2, \cdots)$. 进而有 $\operatorname{Ker}\sigma^m = \operatorname{Ker}\sigma^{2m}$.
(7 分)

下面证明 $V = \operatorname{Ker}\sigma^m \oplus \operatorname{Im}\sigma^m$.

$\forall \alpha \in \operatorname{Ker}\sigma^m \bigcap \operatorname{Im}\sigma^m$, 由 $\alpha \in \operatorname{Im}\sigma^m$, 存在 $\beta \in V$, 使得 $\alpha = \sigma^m(\beta)$. 由此 $0 = \sigma^m(\alpha) = \sigma^{2m}(\beta)$, 所以 $\beta \in \operatorname{Ker}\sigma^{2m}$, 从而 $\beta \in Ker\sigma^m = \operatorname{Ker}\sigma^{2m}$. 故 $\alpha = \sigma^m(\beta) = 0$. $\operatorname{Ker}\sigma^m \bigcap \operatorname{Im}\sigma^m = (0)$, 从而 $V = \operatorname{Ker}\sigma^m \oplus \operatorname{Im}\sigma^m$. (12 分)

由 $\sigma(\operatorname{Ker}\sigma^m) \subseteq \operatorname{Ker}\sigma^m$， $\sigma(\operatorname{Im}\sigma^m) \subseteq \operatorname{Im}\sigma^m$ 知 $\operatorname{Ker}\sigma^m, \operatorname{Im}\sigma^m$ 是 $\sigma-$不变子空间. 又由 $\sigma^m(\operatorname{Ker}\sigma^m) = (0)$ 知 $\sigma|_{\operatorname{Ker}\sigma^m}$ 是幂零变换. 由 $\sigma(\operatorname{Im}\sigma^m) = \operatorname{Im}\sigma^m$ 知 $\sigma|_{\operatorname{Im}\sigma^m}$ 是满线性变换, 从而可逆. .... (17 分)

从 $V_1 = \operatorname{Im}\sigma^m, V_2 = \operatorname{Ker}\sigma^m$ 中各找一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$; $\beta_1, \cdots, \beta_t$，合并成 V 的一组基, σ 在此基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是 $\sigma|_{V_1}$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 下的矩阵, 从而可逆; C 是 $\sigma|_{V_2}$ 在基 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 下的矩阵, 是幂零矩阵. 从而 A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是可逆矩阵, C 是幂零矩阵. .... (20 分)

==

注: 如果视 F 为复数域直接用若当标准型证明, 证明正确可以给 10 分:
存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(J(\lambda_1, n_1), \cdots, J(\lambda_s, n_s), J(0, m_1), \cdots, J(0, m_t)),$$

其中 $J(\lambda_i, n_i)$ 是特征值为 λ_i 的阶为 n_i 的若当块，$\lambda_i \neq 0$; $J(0, m_j)$ 特征值为 0 的阶为 m_j 的若当块. .... (5 分)

令

$$B = \operatorname{diag}\left(J(\lambda_1, n_1), \cdots, J(\lambda_s, n_s)\right),$$

$$C = \operatorname{diag}\left(J(0, m_1), \cdots, J(0, m_t)\right),$$

则 B 为可逆矩阵, C 为幂零矩阵, A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$. .... (10 分)

七、 (本题 15 分) 设 $F(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调递减函数, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}F(t)\sin\frac{t}{n}\,dt=0$.

证明: (i) $\lim\limits_{x\to+\infty}xF(x)=0$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{+\infty}F(t)\sin(xt)\,dt=0$.

证明: 首先, 对任何 $x\in\mathbb{R}$, 不难由关于无穷积分收敛性的 Dirichlet 判别法得到 $\int_0^{+\infty}F(t)\sin(xt)\,dt$ 收敛. 下记

$$f(x)=\int_0^{+\infty}F(t)\sin(xt)\,dt,\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

由于 F 单调下降,

$$\begin{aligned}
&\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi}F(nt)\sin t\,dt\\
=\ &\int_0^{\pi}\Big(F(2nk\pi+nt)-F(2nk\pi+2n\pi-nt)\Big)\sin t\,dt\\
\geq\ &0,\qquad \forall\, k=0,1,2,\ldots.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
f\Big(\frac{1}{n}\Big) &= \int_0^{+\infty}F(t)\sin\frac{t}{n}\,dt\\
&= \int_0^{+\infty}nF(nt)\sin t\,dt\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi}nF(nt)\sin t\,dt\\
&\geq \int_0^{2\pi}nF(nt)\sin t\,dt\\
&= \int_0^{\pi}n\Big(F(nt)-F(2n\pi-nt)\Big)\sin t\,dt\\
&\geq \int_0^{\frac{\pi}{2}}n\Big(F(nt)-F(2n\pi-nt)\Big)\sin t\,dt\\
&\geq n\Big[F\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3n\pi}{2}\Big)\Big]\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt\\
&= n\Big[F\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3n\pi}{2}\Big)\Big]\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (5 分)

结合 $\lim\limits_{n\to+\infty} f\Big(\dfrac{1}{n}\Big)=0$ 得

$$\lim_{n\to+\infty} n\Big[F\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3n\pi}{2}\Big)\Big]=0.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (7 分)

这样, 任取 $\delta>0$, 有 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时, 有

$$n\Big|F\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3n\pi}{2}\Big)\Big|\le\delta.$$

从而对任何 $m>0$, $n>N$ 有

$$\begin{aligned}
0 &\le nF\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\\
&\le \sum_{k=0}^{m} n\Big|F\Big(\frac{3^k n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3^{k+1}n\pi}{2}\Big)\Big|+nF\Big(\frac{3^{m+1}n\pi}{2}\Big)\\
&\le \sum_{k=0}^{m}\frac{\delta}{3^k}+nF\Big(\frac{3^{m+1}n\pi}{2}\Big)\\
&\le \frac{3\delta}{2}+nF\Big(\frac{3^{m+1}n\pi}{2}\Big).
\end{aligned}$$

上式中令 $m\to+\infty$, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ 得到

$$0\le nF\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\le\frac{3\delta}{2},\qquad \forall\, n>N.$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} nF\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)=0.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (9 分)

进一步利用单调性, 当 $x>\dfrac{\pi}{2}$ 时, 有

$$0\le xF(x)\le\pi\Big[\frac{2x}{\pi}\Big]F\Big(\Big[\frac{2x}{\pi}\Big]\cdot\frac{\pi}{2}\Big),$$

其中 $[s]$ 表示实数 s 的整数部分. 于是可得

$$\lim_{x\to+\infty} x\,F(x)=0.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (10 分)

从而又知 $xF(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界, 设上界为 $M \geq 0$.

$\forall \varepsilon \in (0,\pi)$, 当 $x>0$ 时, 我们有

$$
\begin{aligned}
0 &\leq f(x) = \int_0^{+\infty} x^{-1}F(x^{-1}t)\sin t\,dt \\
&\leq \int_0^{\pi} x^{-1}t\,H(x^{-1}t)\,\frac{\sin t}{t}\,dt
\end{aligned}
$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (12 分)

$$
\leq x^{-1}\varepsilon\,H(x^{-1}\varepsilon)\int_\varepsilon^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt + M\varepsilon, \qquad \forall\, x>0.
$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (14 分)

于是

$$
0 \leq \varlimsup_{x\to 0^+} f(x) \leq M\varepsilon.
$$

由 $\varepsilon \in (0,\pi)$ 的任意性, 可得 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

进而因 f 是奇函数推得 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. $\dots\dots\dots\dots$ (15 分)

$\square$

试题解答

1：（ 15 分）　设 Γ 为椭圆抛物面 $z = 3x^2 + 4y^2 + 1$. 从原点作 Γ 的切锥面. 求切锥面方程.

解答：设 (x, y, z) 为切锥面上的点（非原点）. 存在唯一 t 使得 $t(x, y, z)$ 落在椭圆抛物面上（ 5 分）. 于是有 $tz = (3x^2 + 4y^2)t^2 + 1$, 并且这个关于 t 的二次方程只有一个根（ 10 分）. 于是，判别式

$$\Delta = z^2 - 4(3x^2 + 4y^2) = 0.$$

这就是所求的切锥面方程（ 15 分）. □

2：（ 15 分）设 Γ 为抛物线， P 是与焦点位于抛物线同侧的一点. 过 P 的直线 L 与 Γ 围成的有界区域的面积记为 $A(L)$. 证明： $A(L)$ 取最小值当且仅当 P 恰为 L 被 Γ 所截出的线段的中点.

解答：不妨设抛物线方程为 $y = x^2$, $P = (x_0, y_0)$（ 1 分）. P 与焦点在抛物线的同侧，则 $y_0 > x_0^2$（ 2 分）. 设 L 的方程为 $y = k(x - x_0) + y_0$. L 与 Γ 的交点的 x 坐标满足 $x^2 = k(x - x_0) + y_0$, 有两个解 $x_1 < x_2$ 满足

$$x_1 + x_2 = k,\ \ x_1 x_2 = kx_0 - y_0$$

（ 6 分）. L 与 x 轴， $x = x_1, x = x_2$ 构成的梯形面积 $D = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)(x_2 - x_1)$, 抛物线与 x 轴， $x = x_1, x = x_2$ 构成区域的面积为 $\int_{x_1}^{x_2} x^2\,dx = \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3)$（ 8 分）. 于是有

$$A(L) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)(x_2 - x_1) - \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) = \frac{1}{6}(x_2 - x_1)^3$$

$$\begin{aligned} 36A(L)^2 &= (x_2 - x_1)^6 = ((x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2)^3 = (k^2 - 4kx_0 + 4y_0)^3 \\ &= ((k - 2x_0)^2 + 4(y_0 - x_0^2))^3 \geq 64(y_0 - x_0^2)^3. \end{aligned}$$

（ 12 分），等式成立当且仅当 $A(L)$ 取最小值，当且仅当 $k = 2x_0$, 即 $x_1 + x_2 = 2x_0$（ 15 分）. □

3: （ 10 分）设 $f \in C^1[0, +\infty), f(0) > 0, f'(x) \geq 0 \forall x \in [0, +\infty)$.
已知 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x) + f'(x)}\,dx < +\infty$, 求证： $\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx < +\infty$.

解答：由于 $f'(x) \geq 0$, 有

$$0 \leq \int_0^N \frac{1}{f(x)}\,dx - \int_0^N \frac{1}{f(x) + f'(x)}\,dx = \int_0^N \frac{f'(x)}{f(x)(f(x) + f'(x))}\,dx$$

（ 1 分）. 取极限

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^N \frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+f'(x))}\,dx \le \lim_{N\to+\infty}\int_0^N \frac{f'(x)}{f(x)^2}\,dx$$

$$= \lim_{N\to+\infty}(-\frac{1}{f(x)})\mid_0^N \le \frac{1}{f(0)}$$

（ 8 分）. 故由已知条件有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\,dx \le \int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\,dx + \frac{1}{f(0)} < +\infty$$

（ 10 分）.

4: （ 10 分）设 A, B, C 均为实 n 阶正定矩阵， $P(t) = At^2 + Bt + C$, $f(t) = detP(t)$, 其中 t 为未定元， $detP(t)$ 表示 $P(t)$ 的行列式. 若 λ 为 $f(t)$ 的根，试证明： $Re(\lambda) < 0$, 这里 $Re(\lambda)$ 表示 λ 的实部.

解答：设 λ 为 $f(t)$ 的根，则有 $detP(t) = 0$, 从而 $P(t)$ 的 n 个列线性相关. 于是存在 $\alpha \neq 0$ 使得 $P(\lambda)\alpha = 0$, 进而 $\alpha^* P(\lambda)\alpha = 0$. （ 4 分）
具体地，

$$\alpha^* A\alpha\lambda^2 + \alpha^* B\alpha\lambda + \alpha^* C\alpha = 0.$$

令 $a = \alpha^* A\alpha$, $b = \alpha^* B\alpha$, $c = \alpha^* C\alpha$, 则由 A, B, C 皆为正定矩阵知 $a > 0, b > 0, c > 0$, 且

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

（ 6 分）. 注意到，当 $b^2 - 4ac \ge 0$ 时， $\sqrt{b^2 - 4ac} < b$, 从而

$$Re\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0;$$

（ 8 分）. 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，$\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{4ac - b^2}$, 从而 $Re\lambda = -b/2a < 0$.
□

5: （ 10 分）已知 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, |x| < 1$, n 为正整数. 求 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$.

解答：由于 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$ 恰为 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3}\cdot\frac{1}{1-x}$ 展开式中 x^{n-1} 的系数（ 2 分），而

$$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^4} = \frac{(2-(1-x))^n}{(1-x)^4} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i 2^{n-i}(1-x)^{i-4},$$

其 x^{n-1} 项系数等于

$$2^n(1-x)^{-4}-n2^{n-1}(1-x)^{-3}+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}(1-x)^{-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}(1-x)^{-1}$$

的 x^{n-1} 项系数（ 6 分），也就等于

$$\frac{2^n}{3!}((1-x)^{-1})'''-\frac{n2^{n-1}}{2!}((1-x)^{-1})''$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}((1-x)^{-1})'-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}(1-x)^{-1}$$

的 x^{n-1} 项系数，它等于

$$\frac{2^n}{3!}(n+2)(n+1)n-\frac{n2^{n-1}}{2!}(n+1)n+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}n-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}.$$

故有

$$\sum_{i=0}^{n-1}a_i=\frac{n(n+2)(n+7)}{3}2^{n-4}$$

（ 10 分）. □

6: （ 15 分）设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 可微， $f(0)=f(1),\int_0^1 f(x)\,dx=0$, 且 $f'(x)\neq 1\,\forall x\in[0,1]$. 求证：对任意正整数 n, 有 $\left|\sum_{k=0}^{n-1}f(\frac{k}{n})\right|<\frac{1}{2}$.

解答：由于 $f(0)=f(1)$, 故存在 $c\in(0,1)$ 使得 $f'(c)=0$（ 2 分）. 又 $f'(x)\neq 1$, 由导函数介值性质恒有 $f'(x)<1$（ 4 分）. 令 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(x)$ 为单调下降函数（ 6 分）. 故

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=\int_0^1 g(x)dx+\frac{1}{n}>\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}g(\frac{k}{n})+1))$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g(\frac{k}{n})>\int_0^1 g(x)dx=-\frac{1}{2}$$

（ 12 分）. 于是有

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}f(\frac{k}{n})\right|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}g(\frac{k}{n})+\frac{n-1}{2}\right|<\frac{1}{2}\ \square$$

（ 15 分）

7: （ 25 分）已知实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. 证明：

(1) 矩阵方程 $AX = B$ 有解但 $BY = A$ 无解的充要条件是 $a \neq 2, b = 4/3$;

(2) A 相似于 B 的充要条件是 $a = 3, b = 2/3$;

(3) A 合同于 B 的充要条件是 $a < 2, b = 3$.

解答： (1) 矩阵方程 $AX = B$ 有解等价于 B 的列向量可由 A 的列向量线性表示，$BY = A$ 无解等价于 A 的某个列向量不能由 B 的列向量线性表示（ 2 分）. 对 (A, B) 作初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & b \\ 2 & a & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & b \\ 0 & a-2 & -1 & 1-b \end{pmatrix}$$

知，B 的列向量组可由 A 的列向量线性表示当且仅当 $a \neq 2$（ 6 分）. 对矩阵 (B, A) 作初等行变换：

$$(B, A) = \begin{pmatrix} 4 & b & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & b & 2 & 2 \\ 0 & 1-3b/4 & 1/2 & a-3/2 \end{pmatrix}.$$

由此知 A 的列向量组不能由 B 的列向量线性表示的充要条件是 $b = 4/3$. 所以矩阵方程 $AX = B$ 有解但 $BY = A$ 无解的充要条件是 $a \neq 2, b = 4/3$（ 10 分）.

(2) 若 A, B 相似，则有 $trA = trB$, 且 $|A| = |B|$, 故有 $a = 3, b = 2/3$（ 12 分）. 反之，若 $a = 3, b = 2/3$, 则有

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & 2/3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

A 和 B 的特征多项式均为 $\lambda^2 - 5\lambda + 2$. 由于 $\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$ 由两个不同的根，从而 A, B 都可以相似于同一对角阵. 故 A 与 B 相似（ 15 分）.

(3) 由于 A 为对称阵，若 A, B 合同，则 B 也是对称阵，故 $b = 3$（ 16 分）. 矩阵 B 对应的二次型

$$g(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 = (3x_1 + x_2)^2 - 5x_1^2.$$

在可逆线性变换 $y_1 = 3x_1 + x_2, y_2 = x_1$ 下，$g(x_1, x_2)$ 变成标准型：$y_1^2 - 5y_2^2$（ 18 分）. 由此，B 的正，负惯性指数为 1（ 19 分）. 类似地，A 对应的二次型

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + ax_2^2 = 2(x_1 + x_2)^2 + (a-2)x_2^2$$

在可逆线性变换 $z_1 = 3x_1 + x_2, z_2 = x_2$ 下 $f(x_1, x_2)$ 变成标准型：$2z_1^2 + (a-2)z_2^2$（ 22 分）. A, B 合同的充要条件是它们有相同的正、负惯性指数，故 A, B 合同的充要条件是 $a < 2, b = 3$（ 25 分） □

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考生座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

第五届中国大学生数学竞赛预赛试卷

(数学类, 2013年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

一、(本题 15 分) 平面 $\mathbb{R}^2$ 上两个半径为 r 的圆 C_1 和 C_2 外切于 P 点. 将圆 C_2 沿 C_1 的圆周（无滑动）滚动一周，这时, C_2 上的 P 点也随 C_2 的运动而运动. 记 Γ 为 P 点的运动轨迹曲线, 称为心脏线. 现设 C 为以P 的初始位置 (切点) 为圆心的圆, 其半径为 R. 记 $\gamma : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \to \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ 为圆 C 的反演变换，它将 $Q \in \mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$ 映成射线 PQ 上的点 Q', 满足 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ'} = R^2$. 求证：$\gamma(\Gamma)$ 为抛物线.

证明 以 C_1 的圆心 O 为原点建立直角坐标系，使得初始切点 $P = (0, r)$. 将圆 C_2 沿 C_1 的圆周（无滑动）滚动到 Q 点, 记角 $\angle POQ = \theta$, 则 $Q = (r\sin\theta, r\cos\theta)$. 令 ℓ_Q 为 C_1 在 Q 点的切线, 它的单位法向为 $\vec{n} = (\sin\theta, \cos\theta)$. 这时, P 点运动到 P 关于直线 ℓ_Q 的对称点 $P' = P(\theta)$ 处. 于是, 有

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} - 2(\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n})\vec{n}. \qquad (5\text{分})$$

故 P 点的运动轨迹曲线(心脏线)为

$$P(\theta) = P' = (2r(1-\cos\theta)\sin\theta, r + 2r(1-\cos\theta)\cos\theta),\ \ 0 \le \theta \le 2\pi. \qquad (8\text{分})$$

容易得到, 圆 C 的反演变换的坐标表示为

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, r) + \frac{R^2}{x^2 + (y-r)^2}(x, y-r). \qquad (11\text{分})$$

将 $(x, y) = P(\theta)$ 代人, 得到

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\frac{R^2\sin\theta}{2r(1-\cos\theta)}, \frac{R^2\cos\theta}{2r(1-\cos\theta)} + r\right). \qquad (13\text{分})$$

直接计算，得到抛物线方程

$$\tilde{y} = \frac{r}{R^2}\tilde{x}^2 + (r - \frac{R^2}{4r}). \qquad (15\text{分})$$

二、 (本题 10 分) 设 n 阶方阵 $B(t)$ 和 $n\times 1$ 矩阵 $b(t)$ 分别为 $B(t)=(b_{ij}(t))$ 和 $b(t)=\begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$, 其中 $b_{ij}(t), b_i(t)$ 均为关于 t 的实系数多项式, $i,j=1,2,\cdots,n$. 记 $d(t)$ 为 $B(t)$ 的行列式, $d_i(t)$ 为用 $b(t)$ 替代 $B(t)$ 的第 i 列后所得的 n 阶矩阵的行列式. 若 $d(t)$ 有实根 t_0 使得 $B(t_0)X=b(t_0)$ 成为关于 X 的相容线性方程组, 试证明: $d(t), d_1(t), \cdots, d_n(t)$ 必有次数 $\geqslant 1$ 的公因式.

证明 设 $B(t)$ 的第 i 列为 $B_i(t), i=1,2,\cdots,n$. 断言：$t-t_0$ 是 $d(t), d_1(t), \cdots, d_n(t)$ 的公因式. 反证. 不失一般性，设 $d_1(t_0)\neq 0$，于是

秩$[B(t_0), b(t_0)]=n$, 因为 $d_1(t_0)\neq 0$. (5 分)

注意到秩$B(t_0)\leqslant n-1$, 结果

增广阵$[B(t_0), b(t_0)]$ 的秩 $\neq B(t_0)$ 的秩, (9 分)

从而 $B(t_0)X=b(t_0)$ 不相容. 矛盾. 证毕. (10 分)

六、 (本题 25 分) 设 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 为 n 阶实方阵全体, E_{ij} 为 (i,j) 位置元素为 1 其余位置元素为 0 的 n 阶方阵, $i,j=1,2,\cdots,n$. 让 Γ_r 为秩等于 r 的实 n 阶方阵全体, $r=0,1,2,\cdots,n$, 并让 $\phi: \mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 为可乘映照, 即满足: $\phi(AB)=\phi(A)\phi(B), \forall\, A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 试证明:

(1) $\forall\, A,B\in\Gamma_r$, 秩$\phi(A)=$秩$\phi(B)$.

(2) 若 $\phi(0)=0$, 且存在某个秩为 1 的矩阵 W 使得 $\phi(W)\neq 0$, 则必存在可逆方阵 R 使得 $\phi(E_{ij})=RE_{ij}R^{-1}$ 对一切 E_{ij} 皆成立, $i,j=1,2,\cdots,n$.

证明: (1) $A,B\in\Gamma_r$ 表明 A 可表为 $A=PBQ$, 其中 P,Q 可逆. (1 分)

结果 $\phi(A)=\phi(P)\phi(B)\phi(Q)$, 从而 秩$\phi(A)\leqslant$秩$\phi(B)$. (3 分)

对称地有 秩$\phi(B)\leqslant$秩$\phi(A)$. 即有, 秩$\phi(A)=\phi(B)$. (5 分)

(2) 考察矩阵集合 $\{\phi(E_{ij})|i,j=1,2,\cdots,n\}$. 先考察 $\phi(E_{11}),\cdots,\phi(E_{nn})$. 由 (1) 知 $\phi(E_{ij})$ 为非零阵, 特别地, $\phi(E_{ii})$ 为非零幂等阵, 故存在单位特征向量 w_i 使得

$$\phi(E_{ii})w_i=w_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

从而得向量组: $w_1,w_2,\cdots,w_n$. (7 分)

此向量组有如下性质:

a) $\phi(E_{ii})w_k=\begin{cases}\phi(E_{ii})\phi(E_{kk})w_k=\phi(E_{ii}E_{kk})w_k=0, & k\neq i \text{ 时}\\ w_i, & k=i \text{ 时}.\end{cases}$

b) $w_1,w_2,\cdots,w_n$ 线性无关, 从而构成 $\mathbb{R}^n$ 的基, 矩阵 $W=[w_1,w_2,\cdots,w_n]$ 为可逆阵. 事实上, 若 $x_1w_1+\cdots+x_nw_n=0$, 则在两边用 $\phi(E_{ii})$ 作用之, 得 $x_i=0$, $i=1,2,\cdots,n$. (11 分)

c) 当 $k\neq j$ 时, $\phi(E_{ij})w_k=\phi(E_{ij})\phi(E_{kk})w_k=\phi(E_{ij}E_{kk})w_k=0$;

当 $k=j$ 时, 令 $\phi(E_{ij})w_k=b_{1j}w_1+\cdots+b_{ij}w_i+\cdots+b_{nj}w_n$. 两边分别用

$\phi(E_{11}), \cdots, \phi(E_{i-1\ i-1}), \phi(E_{i+1\ i+1}), \cdots, \phi(E_{nn})$ 作用之, 得

$$0 = \phi(E_{11}E_{ij})w_j = \phi(E_{11})\phi(E_{ij})w_k = b_{1j}w_1, \cdots,$$
$$0 = \phi(E_{nn}E_{ij})w_j = \phi(E_{nn})(b_{1j}w_1 + \cdots + b_{ij}w_i + \cdots + b_{nj}w_n) = b_{nj}w_n,$$

即有

$$b_{1j} = \cdots = b_{i-1\ j} = b_{i+1\ j} = \cdots = b_{nj} = 0.$$

从而 $\phi(E_{ij})w_j = b_{ij}w_i$, 进一步, $b_{ij} \neq 0$, 否则有 $\phi(E_{ij})[w_1, \cdots, w_n] = 0$, 导致 $\phi(E_{ij})$ 为零阵, 不可能. (15 分)

这样通过计算 $\phi(E_{ij})w_j\ i, j = 1, 2, \cdots, n$, 我们得到 n^2 个非零的实数:

$$\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}$$

注意到 $E_{mr}E_{rs} = E_{ms}$, 从而

$$b_{ms}w_m = \phi(E_{ms})w_s = \phi(E_{mr})\phi(E_{rs})w_s = \phi(E_{mr})b_{rs}w_r = b_{rs}b_{mr}w_m$$

因此有 $b_{mr}b_{rs} = b_{ms}$. (17 分)

最后, 令 $v_i = b_{i1}w_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$. 则有

$$\phi(E_{ij})v_k = \begin{cases} 0, & k \neq j \text{ 时} \\ \phi(E_{ij})b_{j1}w_j = b_{j1}b_{ij}w_i = b_{i1}w_i = v_i, & k = j \text{ 时}. \end{cases} \quad (21 \text{ 分})$$

令 $R = [v_1, \cdots, v_n]$, 则 $R = [w_1, \cdots, w_n]\begin{pmatrix} b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{n1} \end{pmatrix}$ 为可逆矩阵, 且

$$\phi(E_{ij})R = \phi(E_{ij})[v_1, \cdots, v_n] = [0, \cdots, 0, v_i, 0 \cdots, 0] = [v_1, \cdots, v_n]E_{ij}$$

即, $\phi(E_{ij}) = RE_{ij}R^{-1}$. 证毕. (25 分)

三、 (本题 15 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有二阶连续导数, $f'(0)=1$, $f''(0)\neq 0$, 且 $0<f(x)<x$, $x\in(0,a)$. 令

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad x_1\in(0,a).$$

(1) 求证 $\{x_n\}$ 收敛并求极限; (2) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若不收敛, 则说明理由. 若收敛, 则求其极限.

证明 (1) 由条件 $0<x_2=f(x_1)<x_1$, 归纳地可证得 $0<x_{n+1}<x_n$, 于是 $\{x_n\}$ 有极限, 设为 x_0. 由 f 的连续性, 及 $x_{n+1}=f(x_n)$ 得 $x_0=f(x_0)$. 又因为当 $x>0$ 时, $f(x)>x$, 所以只有 $x_0=0$. 即, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. (5 分)

(2) 由 Stolz 定理和 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}nx_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1/x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/x_{n+1}-1/x_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}x_n}{x_n-x_{n+1}}&&(8分)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nf(x_n)}{x_n-f(x_n)}=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)}{x-f(x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+xf'(x)}{1-f'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2f'(x)+xf''(x)}{-f''(x)}\\&=-\frac{2}{f''(0)}&&(15分)\end{aligned}$$

四、 (本题 15 分) 设 $a>1$, 函数 $f:\ (0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微. 求证存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$ 使得

$$f'(x_n)<f(ax_n),\ n=1,2,\cdots.$$

证明 若结论不对, 则存在 $x_0>0$ 使得当 $x\geqslant x_0$ 时, 有 $f'(x)\geqslant f(ax)>0$. (5分)

于是当 $x>x_0$ 时, $f(x)$ 严格递增, 且由微分中值定理

$$\begin{aligned}f(ax)-f(x)=f'(\xi)(a-1)x&\geqslant f(a\xi)(a-1)x\\&>f(ax)(a-1)x.\end{aligned}$$

但这对于 $x>\frac{1}{a-1}$ 是不能成立的. (10分)

五、(本题 20 分) 设 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ 为偶函数, f 在 $[0,1]$ 上单调递增, 又设 g 是 $[-1,1]$ 上的凸函数, 即对任意 $x,y\in[-1,1]$ 及 $t\in(0,1)$ 有

$$g(tx+(1-t)y)\leqslant tg(x)+(1-t)g(y).$$

求证:
$$2\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx\geqslant\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\int_{-1}^{1}g(x)\,dx.$$

证明 由于 f 为偶函数, 可得

$$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)g(-x)\,dx. \qquad (2分)$$

因而

$$\begin{aligned}2\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx&=\int_{-1}^{1}f(x)(g(x)+g(-x))\,dx\\&=2\int_{0}^{1}f(x)(g(x)+g(-x))\,dx. \qquad (1)\end{aligned}$$

(7分)

因为 $g(x)$ 为凸函数, 所以函数 $h(x)=g(x)+g(-x)$ 在 $[0,1]$ 上递增. (10分)

故对任意 $x,y\in[0,1]$, 有

$$(f(x)-f(y))(h(x)-h(y))\geqslant 0.$$

因而

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}(f(x)-f(y))(h(x)-h(y))\,dxdy\geqslant 0. \qquad (15分)$$

由此可得

$$\begin{aligned}2\int_{0}^{1}f(x)h(x)\,dx&\geqslant 2\int_{0}^{1}f(x)\,dx\cdot\int_{0}^{1}h(x)\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\cdot\int_{-1}^{1}h(x)\,dx\\&=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\cdot\int_{-1}^{1}g(x)\,dx. \qquad (20分)\end{aligned}$$

结合 (1) 即得结论.