2010 年研究生入学考试数学三试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^x\right]=1$，则 a 等于

（A） 0　（B）1　（C） 2　（D） 3　[　　]

【分析】通分后利用洛必达法则即得。

【详解】 $1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(1-ax)\mathrm{e}^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(1-ax)\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^x}{1}=a-1\Rightarrow a=2$，故选(C)

【评注】本题求 $\infty-\infty$ 型未定式极限中的参数，为基础题型。本题还可以这样做:

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-ax)\mathrm{e}^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^x}{x}+a\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^x=a-1\Rightarrow a=2。$$

完全类似例题见 2009 版《数学复习指南》（经济类）第 1 篇第 1 章【例 1.35】;《考研数学核心题型》（经济类）第 1 篇第 1 章【例 19】；类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 1 讲【例 16】.

（2）设 y_1,y_2 为一阶非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 为该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 为该方程对应齐次微分方程的解，则

（A） $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$　　（B） $\lambda=-\frac{1}{2},\mu=-\frac{1}{2}$

（C） $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$　　（D） $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{2}{3}$　　[　　]

【分析】利用微分方程解的性质求解即可。

【详解】因为 y_1,y_2 为一阶非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解,所以

$$y_1'+p(x)y_1=q(x),y_2'+p(x)y_2=q(x).\quad (*)$$

$\lambda y_1+\mu y_2$ 为该方程的解,则

$$(\lambda y_1+\mu y_2)'+p(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=q(x),$$

将(*)代入上式可得 $\lambda+\mu=1$　　　　(**)

$\lambda y_1-\mu y_2$ 为该方程对应齐次微分方程的解,则

$$\left(\lambda y_1-\mu y_2\right)'+p\left(x\right)\left(\lambda y_1-\mu y_2\right)=0$$

将(*)代入上式可得 $\lambda-\mu=0$.　　　(***)

由(**)和(***)可得 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$,故选(A).

【评注】设 $x_1,\cdots,x_s$ 为 $Ax=b$ 的解，则对于常数 $k_1,\cdots,k_s$，

① 若 $k_1+\cdots+k_s=1$，则 $k_1x_1+\cdots+k_sx_s$ 为 $Ax=b$ 的解；

② 若 $k_1+\cdots+k_s=0$，则 $k_1x_1+\cdots+k_sx_s$ 为 $Ax=0$ 的解.

类似例题见《考研数学基础讲义》(经济类）第 1 篇第 9 章【例 9.5】.

（3）设函数 $f\left(x\right),g\left(x\right)$ 具有二阶导数，且 $g''\left(x\right)<0,g\left(x_0\right)=a$ 是 $g\left(x\right)$ 的极值，则 $f\left(g\left(x\right)\right)$ 在 x_0 取到极大值的一个充分条件是

（A） $f'\left(a\right)<0$　　　（B） $f'\left(a\right)>0$

（C） $f''\left(a\right)<0$　　　（D） $f''\left(a\right)>0$　　　[　　]

【分析】由 $g\left(x\right)$ 可导，$g''\left(x\right)<0,g\left(x_0\right)=a$ 是 $g\left(x\right)$ 的极值可得 $g'\left(x_0\right)=0$，然后利用函数取极值的充分条件进行判断。

【详解】$\left[f\left(g\left(x\right)\right)\right]'\Big|_{x=x_0}=f'\left(g\left(x_0\right)\right)g'\left(x_0\right)\Big|_{x=x_0}=0$，即 $x=x_0$ 是 $f\left(g\left(x\right)\right)$ 的驻点；

$$\left[f\left(g\left(x\right)\right)\right]''\Big|_{x=x_0}=f''\left(g\left(x_0\right)\right)\left[g'\left(x_0\right)\right]^2+f'\left(g\left(x_0\right)\right)g''\left(x_0\right)=f'\left(g\left(x_0\right)\right)g''\left(x_0\right),$$

若想要 $f\left(g\left(x\right)\right)$ 在 x_0 取到极大值，只要 $f'\left(g\left(x_0\right)\right)g''\left(x_0\right)<0$，即 $f'\left(g\left(x_0\right)\right)>0$，于是 $f'\left(a\right)>0$ 是一个充分条件， 故选(B)

【评注】本题利用了**取极值的第二充分条件：**

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有 $f''(x_0)\neq 0$，且 $f'(x_0)=0$，则

① 当 $f''(x_0)<0$ 时， $f(x_0)$ 为极大值；

② 当 $f''(x_0)>0$ 时， $f(x_0)$ 为极小值.

类似例题见 2009 版《数学复习指南》(经济类）第 1 篇第 5 章【例 5.7】;《考研数学核心题型》(经济类）第 1 篇第 6 章【例 6】。

（4）设 $f(x)=\ln^{10}x, g(x)=x, h(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时，有

（A）$g(x)<h(x)<f(x)$　　（B）$h(x)<g(x)<f(x)$

（C）$f(x)<g(x)<h(x)$　　（D）$g(x)<f(x)<h(x)$　　[　　]

【分析】因为当 x 充分大时，$f(x)=\ln^{10}x, g(x)=x, h(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$ 均大于零，所以只要计算它们比值的极限然后进行分析即可，为了方便，计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[10]{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{g(x)}{h(x)}\right]^{10}$ 是一样的。

【详解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[10]{\dfrac{f(x)}{g(x)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[10]{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\dfrac{1}{10}x^{-\frac{9}{10}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10}{x^{\frac{1}{10}}}=0$，

于是，当 x 充分大时，$f(x)<g(x)$；

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]^{10}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}}{\mathrm{e}^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x^{9}}{\mathrm{e}^{x}}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{10!}{\mathrm{e}^{x}}=0,$$

于是，当 x 充分大时，$g(x)<h(x)$

故选(C)

【评注】比较两个函数的大小，可以利用的方法很多，如将它们的差值和零进行比较，它们的比值和 1 进行比较，或者利用函数的单调增减性进行判断。

此外,本题利用结论“当 $x\to+\infty$ 时，函数趋于 $+\infty$ 的速度由慢到快为：$\ln x, x^{\alpha}(\alpha>0), a^{x}(a>1), x^{x}$”, 立即可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{10}x}{x}=0, \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}}=0$，故选（C）。

（5）设向量组（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组（Ⅱ）$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则

（A）若向量组（Ⅰ）线性无关，则 $r\le s$　　（B）若向量组（Ⅰ）线性相关，则 $r>s$

（C）若向量组（Ⅱ）线性无关，则 $r\le s$　　（D）若向量组（Ⅱ）线性相关，则 $r>s$

[　　]

【分析】利用向量组的秩的相关结论即可。

【详解】向量组（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组（Ⅱ）$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\le s,$$

对选项（A），若向量组（Ⅰ）线性无关，则 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=r$，

故 $r\le s$，即选（A）

【评注】本题考查向量组的线性相关性，为基础题型。

"$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，且$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表出，则$s\le t$"是一个常用的结论，需熟记。

完全类似例题见《考研数学核心题型》（经济类）第 2 篇第 15 章【例 15（5）】.

（6）设A为 4 阶实对称矩阵,且$A^2+A=O$,若A的秩为 3 ,则A相似于

（A）$\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{bmatrix}$ （B）$\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$ （D）$\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$ [ ]

【分析】实对称矩阵可相似于由其特征值组成的对角阵，所以本题的关键是求出其特征值。

【详解】因为A为 4 阶实对称矩阵，所以A必可相似对角化，且A的特征值全为实数。

设λ为A的特征值，则$\lambda^2+\lambda=0\Rightarrow\lambda=0,\lambda=-1$。又$A$的秩为 3，则$A$的特征值为$-1,-1,-1,0$，故选（D）。

【评注】 本题综合考查了实对称矩阵可相似对角化，特征值的性质和矩阵的秩等多个知识点。

完全类似例题见《考研数学核心题型》（经济类）第 2 篇第 17 章【例 3】；类似例题见文登暑期强化班讲义《线性代数》第 5 讲【例 14】；2009 版《数学复习指南》（经济类）第 2 篇第 5 章【例 5.3】.

（7）设随机变量X 的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\ge 1\end{cases}$，则$P\{X=1\}=$

（A）0 （B）$\dfrac{1}{2}$ （C）$\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$ （D）$1-\mathrm{e}^{-1}$ [ ]

【分析】由于分布函数在$x=1$ 处不连续，所以利用$P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)$求解。

【详解】 $P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=1-\mathrm{e}^{-1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$，故选（C）。

【评注】本题已知随机变量的分布函数，求事件$\{X=1\}$发生的概率，为基础题型。

类似例题见文登暑期强化班讲义《概率统计》第 2 讲【例 1】；2009 版《数学复习指南》（经济类）第 3 篇第 2 章【例 2.19】；《考研数学核心题型》（经济类）第 3 篇第 20 章【例 16】

（8）设 $f_1(x)$ 是标准正态分布的概率密度函数，$f_2(x)$ 是 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度,且

$f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x\le 0 \\ bf_2(x), & x>0 \end{cases}$，（$a>0,b>0$）为概率密度，则 a,b 应满足

（A）$2a+3b=4$　　（B）$3a+2b=4$

（C）$a+b=1$　　（D）$a+b=2$　　[　　]

【分析】利用 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$ 即可。

【详解】 $f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x\le 0 \\ bf_2(x), & x>0 \end{cases}$，所以

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} af_1(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty} bf_2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+b\int_0^3 f_2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b,$$

于是 $2a+3b=4$，故选（A）。

【评注】本题已知分布反求分布中的参数，为基础题型。

类似例题见文登暑期强化班讲义《概率统计》第 2 讲【例 16】；2009 版《数学复习指南》（经济类）第 3 篇第 2 章【例 2.5】，精选习题二第 2 小题（2）；《考研数学核心题型》（经济类）第 3 篇第 20 章【例 11】．

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

（9）设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x x\sin t^2\mathrm{d}t$ 确定，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=$ ________.

【分析】本题求隐函数的导数，两边分别对 x 求导即得。

【详解】 $\int_0^{x+y} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x x\sin t^2\mathrm{d}t$ 两边对 x 求导得

$$\mathrm{e}^{-(x+y)^2}(1+y')=\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t+x\sin x^2,$$

又 $y(0)=0$,所以 $\mathrm{e}^{-(x+y)^2}(1+y')\Big|_{x=0}=\left(\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t+x\sin x^2\right)\Big|_{x=0}=0$

解之得 $y'\big|_{x=0}=-1$.

【评注】本题求隐函数的导数，为基础题型。注意 y 是 x 的函数。

完全类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 2 讲【例 14】；2009 版《数学复习指南》（经济类）第 1 篇第 2 章【例 2.14】；《考研数学核心题型》（经济类）第 1 篇第 2 章【例 19】．

(10) 设位于曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x\left(1+\ln^2 x\right)}}\left(\mathrm{e}\le x<+\infty\right)$ 下方，x 轴上方的无界区域 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所形成空间区域的体积为_________.

【分析】本题求一无界区域的平面图形绕坐标轴旋转而成的旋转体的体积，利用公式计算即可，注意所求积分为广义积分。

【详解】$V=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\pi y^2\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{\pi}{x\left(1+\ln^2 x\right)}\mathrm{d}x=\pi\arctan\left(\ln x\right)\Big|_{\mathrm{e}}^{+\infty}=\pi\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi^2}{4}$.

【评注】本题为定积分在几何中的应用。请记住：

由曲线 $y=f(x)>0$ 和直线 $x=a,x=b$ 及 x 轴围成的图形

① 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为：$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$；

② 绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积为：$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 6 讲§1【例 3】；2009 版《数学复习指南》（经济类）第 1 篇第 5 章【例 5.35】；《考研数学核心题型》（经济类）第 1 篇第 6 章【例 28】.

(11) 设某商品的收益函数为 $R\left(p\right)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，且 $R\left(1\right)=1$，则 $R\left(p\right)=$ _______.

【分析】先根据题设建立微分方程，然后根据方程的类型求解即可。

【详解】由题设可知, $1+p^3=\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}\cdot\dfrac{p}{R}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}R}{R}=\dfrac{1+p^3}{p}\mathrm{d}p\Rightarrow\ln R=\ln p+\dfrac{1}{3}p^3+C$,

将 $R\left(1\right)=1$ 代入上式,则 $C=-\dfrac{1}{3}$,故

$$\ln R=\ln p+\frac{1}{3}p^3-\frac{1}{3}\Rightarrow R=p\mathrm{e}^{\frac{1}{3}p^3-\frac{1}{3}}.$$

【评注】本题为微积分在经济中的应用。考生需熟悉常见的经济术语及其计算公式。

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）第 1 篇第 11 章【例 11.2】；《考研数学核心题型》（经济类）第 1 篇第 12 章【例 2】.

(12) 若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $\left(-1,0\right)$，则 $b=$_______

【分析】利用拐点在曲线上及由多项式方程任意阶可导可得 $y''\left(-1\right)=0$ 求解即可。

【详解】拐点在曲线上,所以 $0=-1+a-b+1$；

又 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 二阶可导,

所以$0 = y''(-1) = (6x+2a)\big|_{x=-1} = -6+2a \Rightarrow a=3, b=a=3$.

【评注】本题已知曲线的拐点坐标反求曲线方程中的参数，为基础题型。

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）第 1 篇第 5 章【例 5.28】;《考研数学核心题型》（经济类）第 1 篇第 6 章【例 12】.

（13）设A,B为 3 阶矩阵，且$|A|=3, |B|=2, |A^{-1}+B|=2$，则$|A+B^{-1}|=$__________ .

【分析】利用$|AB|=|A||B|$（A,B为同阶矩阵）等性质求解即可。

【详解】$|A+B^{-1}||B| = |AB+E|, |A||A^{-1}+B| = |AB+E|$,所以

$$|A||A^{-1}+B| = |A+B^{-1}||B| \Rightarrow 3\times 2 = |A+B^{-1}|\times 2 \Rightarrow |A+B^{-1}|=3.$$

【评注】本题求矩阵的行列式，为基础题型。

完全类似例题见《考研数学核心题型》（经济类）第 2 篇第 14 章【例 14】; 类似例题见 2009 版《数学复习指南》（经济类）第 2 篇第 2 章【2.12】.

（14）设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)(\sigma>0)$的简单随机样本，统计差

$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$，则$ET=$__________ .

【分析】因为$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，则

$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立同分布。

【详解】$ET = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i^2$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[DX_i + (EX_i)^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\sigma^2+\mu^2\right] = \sigma^2+\mu^2$$

【评注】本题求统计量的数字特征。考生一般对$DX = EX^2 - (EX)^2$很熟悉，但

$EX^2 = DX + (EX)^2$ 也是常用结论。

类似例题见 2009 版《数学复习指南》（经济类）第 3 篇第 5 章【例 5.1】【例 5.2】;《考研数学核心题型》（经济类）第 3 篇第 24 章【例 4】,【例 5】;《考研数学精题 660》（3.118，3.122）.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15） **(本题满分 10 分)**

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$。

【分析】利用对数恒等化处理后求解。

【详解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{\ln x}\right\}$,而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{\ln x}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}\cdot\frac{1-\ln x}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x}\left(x\to+\infty\text{时},\frac{\ln x}{x}\to0,e^{\frac{\ln x}{x}}-1\sim\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}=-1,$$

故原极限 $=e^{-1}$。

【评注】本题求幂指函数的极限，为基础题型。注意 $x^{\frac{1}{x}}$ 仍是幂指函数，所以也需对数恒等化处理后再计算。

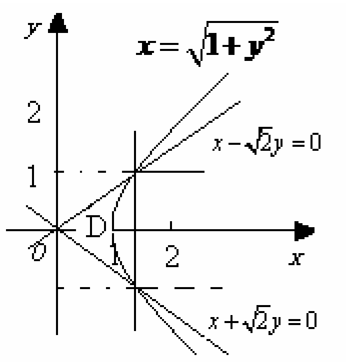
类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 1 讲【例 23】；2009 版《数学复习指南》（经济类）第 1 篇第 1 章【例 1.31】;《考研数学核心题型》（经济类）第 1 篇第 1 章【例 16】.

（16） **(**本题满分 10 分**)**

计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)^3\,dxdy$，其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0,x-\sqrt{2}y=0$ 所围成。

【分析】画出积分区域的草图，先利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性简化计算后再求解。

【详解】画出积分域草图如下



由上可知,积分域关于 x 轴对称,又

被积函数 $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$,其中 $3x^2y+y^3$ 是 y 的奇函数，x^3+3xy^2 是 y 的偶函数,所以

$$\iint_D (x+y)^3 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} \left(x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^1 \left[\frac{\left(1+y^2\right)^2-4y^4}{4} + \frac{3y^2\left(1+y^2-2y^2\right)}{2}\right]\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-9y^4+8y^2+1\right)\mathrm{d}y = \frac{14}{15}.$$

【评注】计算二重积分时，利用积分区域的对称性与被积函数的奇偶性是简化计算的常用方法。

类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 10 讲【例 2】；2009 版《数学复习指南》（经济类）第 1 篇第 7 章【例 7.5】；《考研数学核心题型》（经济类）第 1 篇第 9 章【例 7】，【例 8】；《考研数学精题 660》（1.299）.

（17） (本题满分 10 分)

求函数 $M = xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值。

【分析】先写出拉格朗日函数，然后利用取极值的必要条件求出可能的极值点，比较各点的函数值，最大者为最大值，最小者为最小值。

【详解】 $L = xy+2yz+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-10\right)$,令

$$\begin{cases} L_x = y+2\lambda x = 0 \\ L_y = x+2z+2\lambda y = 0 \\ L_z = 2y+2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2-10 = 0 \end{cases}$$，解之得

$$\begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt{5} \\ z=2 \\ \lambda=-\dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{cases},\begin{cases} x=1 \\ y=-\sqrt{5} \\ z=2 \\ \lambda=\dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{cases},\begin{cases} x=-1 \\ y=-\sqrt{5} \\ z=-2 \\ \lambda=-\dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{cases},\begin{cases} x=-1 \\ y=\sqrt{5} \\ z=-2 \\ \lambda=\dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{cases},\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=0 \\ z=-\sqrt{2} \\ \lambda=0 \end{cases},\begin{cases} x=-2\sqrt{2} \\ y=0 \\ z=\sqrt{2} \\ \lambda=0 \end{cases},$$

因为$M\left(1,\sqrt{5},2\right)=5\sqrt{5},M\left(1,-\sqrt{5},2\right)=-5\sqrt{5}$,

$$M\left(-1,\sqrt{5},-2\right)=-5\sqrt{5},M\left(-1,-\sqrt{5},-2\right)=5\sqrt{5},$$

$$M\left(2\sqrt{2},0,-\sqrt{2}\right)=0,M\left(-2\sqrt{2},0,\sqrt{2}\right)=0,$$

所以比较后可得最大值为$5\sqrt{5}$,最小值为$-5\sqrt{5}$.

【评注】本题求函数的最值点，为基础题型。

完全类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第9讲【例17】；2009版《数学复习指南》（经济类）第1篇第6章【例6.25】；《考研数学核心题型》第1篇第8章【例26】.

（18）（本题满分10分）

(Ⅰ)比较$\int_0^1\left|\ln t\right|\left[\ln\left(1+t\right)\right]^n\mathrm{d}t$与$\int_0^1 t^n\left|\ln t\right|\mathrm{d}t\left(n=1,2,\cdots\right)$的大小,说明理由.

(Ⅱ)记$u_n=\int_0^1\left|\ln t\right|\left[\ln\left(1+t\right)\right]^n\mathrm{d}t\left(n=1,2,\cdots\right)$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

【分析】由定积分比较定理，两个积分的大小的比较可转化为被积函数大小的比较.

【详解】(Ⅰ)令$f\left(t\right)=\left[\ln\left(1+t\right)\right]^n-t^n\left(0\le t\le 1\right)$,

当$n=1$时，$f'\left(t\right)=\dfrac{1}{1+t}-1<0$,所以$f\left(t\right)=\ln\left(1+t\right)-t<f\left(0\right)=0$,

即有$0\le\ln\left(1+t\right)\le t$,从而有$0\le\left[\ln\left(1+t\right)\right]^n\le t^n\left(0\le t\le 1\right)$

所以$f\left(t\right)=\left[\ln\left(1+t\right)\right]^n-t^n<0$,即有

$$\left|\ln t\right|\left[\ln\left(1+t\right)\right]^n<t^n\left|\ln t\right|,$$

故$\int_0^1\left|\ln t\right|\left[\ln\left(1+t\right)\right]^n\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n\left|\ln t\right|\mathrm{d}t\left(n=1,2,\cdots\right)$.

(Ⅱ) $0\le u_n=\int_0^1\left|\ln t\right|\left[\ln\left(1+t\right)\right]^n\mathrm{d}t\le\int_0^1\left|\ln t\right|t^n\mathrm{d}t$,又

$$\int_0^1\left|\ln t\right|t^n\mathrm{d}t=-\int_0^1\ln t\cdot t^n\mathrm{d}t=-\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1+\frac{1}{n+1}\int_0^1 t\mathrm{d}t=-\frac{1}{2\left(n+1\right)}\to 0\left(n\to\infty\right),$$

所以由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

【评注】在考试中，(Ⅱ) 的计算常常要借助(Ⅰ)的结果。

类似例题见《考研数学核心题型》（经济类）第 1 篇第 4 章【例 4】；

相关结论见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 5 讲和 2009 版《数学复习指南》（经济类）第 1 篇第 3 章.

（19） **(**本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,3]$ 上连续，在开区间 $(0,3)$ 内存在二阶导数，且 $2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3)$，

（Ⅰ）证明存在 $\eta\in(0,2)$，使得 $f(\eta)=f(0)$；

(Ⅱ) 证明存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$。

【分析】（Ⅰ）令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，可利用拉格朗日中值定理证得；(Ⅱ)需利用两次罗尔定理。

【详解】（Ⅰ）令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则由拉格朗日中值定理可得存在 $\eta\in(0,2)$，使得 $F(2)-F(0)=2f(\eta)$，而 $F(2)-F(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，即 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(\eta)$，又 $2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，所以 $f(0)=f(\eta)$。

(Ⅱ) $f(x)$ 在闭区间 $[2,3]$ 上连续，从而在该区间存在最大值 M 和最小值 m，于是

$$m\le f(2)\le M, m\le f(3)\le M \Rightarrow m\le \frac{f(2)+f(3)}{2}\le M,$$

由介值定理可得，$f(\zeta)=\dfrac{f(2)+f(3)}{2},\zeta\in[2,3]$。

于是 $f(0)=f(\eta)=f(\zeta),\eta\in(0,2),\zeta\in[2,3]$

函数 $f(x)$ 在 $[0,\eta],[\eta,\zeta]$ 均满足罗尔定理，所以存在 $\xi_1\in(0,\eta),\xi_2\in(\eta,\zeta)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$。函数 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 满足罗尔定理，故存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$。

【评注】在含定积分的证明中 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是常用的辅助函数。

类似例题见《考研数学核心题型》（经济类）第 1 篇第 5 章【例 12】，【例 13】；文登暑期强化班讲义《高等数学》第 4 讲【例 6】，【例 7】。

（20） (本题满分 11 分)

设 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$,

已知线性方程组 $Ax=b$ 有两个不同的解,

(Ⅰ)求 λ, a ;(Ⅱ)求方程 $Ax=b$ 的通解.

【分析】由“线性方程组 $Ax=b$ 有两个不同的解”可得

非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无数个解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})<3 \Rightarrow |A|=0$ 。

【详解】线性方程组 $Ax=b$ 有两个不同的解，则

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda=1 \text{或} \lambda=-1。$$

当 $\lambda=1$ 时，

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right]，则 r(A)=2\neq 3=r(\bar{A})，所以 \lambda=1 不成立。$$

当 $\lambda=-1$ 时，

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{array}\right],$$

因为 $Ax=b$ 有解，所以 $a+2=0 \Rightarrow a=-2$ 。

(Ⅰ)综上，$\lambda=-1, a=-2$ 。

(Ⅱ)原方程与以下方程组同解

$$\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=-2\\ -2x_2=1\end{cases} \Rightarrow x=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}+c\\ -\frac{1}{2}\\ c\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}，其中 c 为任意常数。$$

【评注】本题已知非齐次线性方程组解的情况，反求方程组中的参数，要想到利用解的判定定理求解。

$A_{m\times n}x=b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A|b)=r(\bar{A})$ ，且

① $r(A)=r(\bar{A})=r=n \Leftrightarrow A_{m\times n}x=b$ 有唯一解；

② $r(A)=r(\bar{A})=r<n \Leftrightarrow A_{m\times n}x=b$ 有无穷多解.

类似例题见文登暑期强化班讲义《线性代数》第 4 讲【例 5】,【例 11】；2009 版《数学复习指南》（经济类）第 2 篇第 4 章【例 4.11】;《考研数学核心题型》（经济类）第 2 篇第 17 章【例 10】.

（21） **(**本题满分 11 分)

设 $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{bmatrix}$，存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角阵，若 Q 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，求 a,Q。

【分析】由题设，$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$ 为 A 的属于特征值 λ_1 一个特征向量，则由 $\frac{1}{\sqrt{6}}A(1,2,1)^{\mathrm{T}}=\lambda_1\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$ 可得 λ_1,a；Q 的其他两列为其他特征值所对应的正交的单位特征向量，利用常规方法计算即可。

【详解】由题设 $\frac{1}{\sqrt{6}}A(1,2,1)^{\mathrm{T}}=\lambda_1\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，于是

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\Rightarrow a=-1,\lambda_1=2。$$

由于 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+4),$$

所以 A 的特征值为 $2,5,-4$。

属于特征值 5 的一个单位特征向量为 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$；

属于特征值 -4 的一个单位特征向量为 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$。

令 $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，则有 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 5 & \\ & & -4\end{bmatrix}$，故 Q 为所求矩阵。

【评注】因为正交矩阵Q，使得$Q^{\mathrm{T}}AQ$为对角阵，则Q的列为A的特征向量。本题正是以此为切入点解出a。

类似例题见文登暑期强化班讲义《线性代数》第5讲【例12】；2009版《数学复习指南》（经济类）第2篇第5章【例5.23】;《考研数学核心题型》（经济类）第2篇第18章【例14】.

（22） (本题满分11分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\ (-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty),$$

求常数A及条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$。

【分析】首先利用二维随机变量分布密度函数的性质求A，然后利用条件概率密度公式求$f_{Y|X}(y|x)$。

【详解】$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y$

$$=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$$

$$=A\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=A\pi$$

所以$A=\dfrac{1}{\pi}$. 于是

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\ (-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)。$$

X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}\ (-\infty<x<+\infty),$$

于是当$-\infty<x<+\infty$时，条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\frac{\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2xy-y^2}\ (-\infty<y<+\infty)。$$

【评注】本题计算二维随机变量概率密度中的常数及条件概率密度，为基础题型。

类似例题见文登暑期强化班讲义《概率统计》第3讲【例3】；2009版《数学复习指南》（经济类）第3篇第2章【例2.37】，【例2.38】；《考研数学核心题型》（经济类）第3篇第21章【例7】.

（23） **(本题满分11分)**

箱中装有6个球，其中红、白、黑球的个数分别为1，2，3个，现从箱中随机地取出2个球，记X为取出的红球个数，Y为取出的白球个数，

（Ⅰ）求随机变量$\left(X,Y\right)$的概率分布；（Ⅱ）求$\text{cov}\left(X,Y\right)$。

【分析】（Ⅰ）写出$\left(X,Y\right)$的可能值，然后计算相应的概率即得$\left(X,Y\right)$的概率分布；

（Ⅱ）利用公式$\text{cov}\left(X,Y\right)=EXY-EXEY$计算。

【详解】（Ⅰ）X的可能值为0，1；Y的可能值为0，1，2，于是

$$P\left\{X=0,Y=0\right\}=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}，P\left\{X=1,Y=0\right\}=\frac{C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{15},$$

$$P\left\{X=0,Y=1\right\}=\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{6}{15}，P\left\{X=1,Y=1\right\}=\frac{C_2^1}{C_6^2}=\frac{2}{15},$$

$$P\left\{X=0,Y=2\right\}=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}，P\left\{X=1,Y=2\right\}=0，$$

随机变量$\left(X,Y\right)$的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{3}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	0

（Ⅱ）由上可知X的概率分布和Y的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y	0	1	2
P	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

所以$EX=\frac{1}{3},EY=\frac{2}{3}$。又$EXY=\frac{2}{15}$，故

$$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{2}{15}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{4}{45}。$$

【评注】本题求离散型二维随机变量的概率分布及两个随机变量的协方差，为基础题型。

类似例题见 2009 版《数学复习指南》（经济类）第 3 篇第 3 章【例 3.18】;《考研数学核心题型》（经济类）第 3 篇第 21 章【例 4】,第 22 章【例 6】.