专业：________ 年级：________ 所在院校：________ 身份证号：________ 姓名：________

密 —— 封 —— 线

首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷解答
（非数学类，2009）

考试形式：闭卷　　考试时间：120 分钟　　满分：100 分.

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
满　分	20	5	15	15	10	10	15	10	100
得　分									

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.

2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.

得　分	
评阅人	

一、　填空题（每小题 5 分，共 20 分）.

（1）计算 $\iint_D \dfrac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}dxdy=$______________，其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

（2）设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)dx-2$，则 $f(x)=$__________________.

（3）曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是__________________________.

（4）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$____________________.

答案：$\dfrac{16}{15}$，$3x^2-\dfrac{10}{3}$，$2x+2y-z-5=0$，$-\dfrac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$.

得　分	
评阅人	

二、（5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，其中 n 是给定的正整数.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\exp\{\frac{e}{x}\ln(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n})\}$

$$=\exp\{\lim_{x\to 0}\frac{e(\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n)}{x}\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{（2 分）}$$

其中大括号内的极限是 $\frac{0}{0}$ 型未定式，由 $L'Hospital$ 法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e(\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e(e^x+2e^x+\cdots+ne^{nx})}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$$

$$=\frac{e(1+2+\cdots+n)}{n}=(\frac{n+1}{2})e$$

于是　原式= $e^{(\frac{n+1}{2})e}$.　　　　……………………………………..…………..…(5 分)

得　分	
评阅人	

三、（15 分）设函数 $f(x)$ 连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$，$A$ 为常数，求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解：由题设，知 $f(0)=0$，$g(0)=0$.　　　　…………….…………....…(2 分)

令 $u=xt$，得 $g(x)=\frac{\int_0^x f(u)du}{x}$　$(x\neq 0)$，……………………………………..……（5 分）

从而　$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}$　$(x\neq 0)$ ……………………………………..……(8 分)

由导数定义有

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(11 分)}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=g'(0)$，

从而知 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.　………………………………………………..……….(15 分)

专业：________ 年级：________ 所在院校：________ 身份证号：________ 姓名：________

密 封 线

得 分	
评阅人	

四、（15 分）已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi\ ,0\le y\le\pi\}$ ，L 为 D 的正向边界，试证：

（1）$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$ ；

（2）$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge\frac{5}{2}\pi^2$.

证法一：由于区域 D 为一正方形，可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算.

(1) 左边 $=\int_0^\pi \pi e^{\sin y}dy-\int_\pi^0\pi e^{-\sin x}dx=\pi\int_0^\pi(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$ ， ......(4 分)

右边 $=\int_0^\pi \pi e^{-\sin y}dy-\int_\pi^0\pi e^{\sin x}dx=\pi\int_0^\pi(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$ ， ....（8 分）

所以 $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$ . ...(10 分)

(2) 由于 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}\ge 2+\sin^2 x$ ， ....(12 分)

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\pi\int_0^\pi(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx\ge\frac{5}{2}\pi^2$$ . ...(15 分)

证法二：（1）根据 $Green$ 公式，将曲线积分化为区域 D 上的二重积分

$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\delta$ .... (4 分)

$\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})d\delta$ ....(8 分)

因为 关于 $y=x$ 对称，所以 $\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\delta=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})d\delta$ ，故

$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$ . ... (10 分)

(2) 由 $e^t+e^{-t}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\ge 2+t^2$

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\delta=\iint_D(e^{\sin x}+e^{-\sin x})d\delta\ge\frac{5}{2}\pi^2 .$$

.....................(15 分)

得　分	
评阅人	

五、（10 分）已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

解: 根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，由题设可知：e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解，且 xe^x 是非齐次的一个特解.因此可以用下述两种解法 ………………………………………………………….……(6 分)

解法一： 故此方程式 $y''-y'-2y=f(x)$ …………………….……..……..……(8 分)

将 $y=xe^x$ 代入上式，得

$f(x)=(xe^x)''-(xe^x)'-2xe^x=2e^x+xe^x-e^x-xe^x-2xe^x=e^x-2xe^x$，

因此所求方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$． ……………………………………… …(10 分)

解法二：故 $y=xe^x+c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$，是所求方程的通解，……………………(8 分)

由 $y'=e^x+xe^x+2c_1e^{2x}-c_2e^{-x}$，$y''=2e^x+xe^x+4c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$，消去 c_1, c_2 得所求方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$. ………………………………………………………...…(10 分)

得　分	
评阅人	

六、(10 分) 设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点，当 $0\le x\le 1$ 时，$y\ge 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a, b, c，使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

解： 因抛物线过原点，故 $c=1$

由题设有 $\int_0^1(ax^2+bx)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$.即 $b=\frac{2}{3}(1-a)$，………..…………….(2 分)

而 $V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2dx=\pi[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2]$

$=\pi[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2]$. …………………………….……….…(5 分)

令 $\frac{dv}{da}=\pi[\frac{2}{5}a+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a-\frac{8}{27}(1-a)]=0$，

得 $a=-\frac{5}{4}$，代入 b 的表达式 得 $b=\frac{3}{2}$. 所以 $y\ge 0$，……………...…………(8 分)

专业：________ 年级：________ 所在院校：________ 身份证号：________ 姓名：________

密 封 线

又因 $\dfrac{d^2v}{da^2}|_{a=-\frac{5}{4}}=\pi[\dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{27}]=\dfrac{4}{135}\pi>0$ 及实际情况，当 $a=-\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{3}{2}$，$c=1$ 时，体积最小. ……………………(10 分)

得　分	
评阅人	

七、（15 分）已知 $u_n(x)$ 满足

$u_n{}'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$（$n$ 为正整数），

且 $u_n(1)=\dfrac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

解：先解一阶常系数微分方程，求出 $u_n(x)$ 的表达式，然后再求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和.

由已知条件可知 $u_n{}'(x)-u_n(x)=x^{n-1}e^x$ 是关于 $u_n(x)$ 的一个一阶常系数线性微分方程，故其通解为

$u_n(x)=e^{\int dx}(\int x^{n-1}e^xe^{-\int dx}dx+c)=e^x(\dfrac{x^n}{n}+c)$ ， ………………(6 分)

由条件 $u_n(1)=\dfrac{e}{n}$，得 $c=0$，故 $u_n(x)=\dfrac{x^ne^x}{n}$，

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^ne^x}{n}=e^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$. ……………………………(8 分)

$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$，其收敛域为 $[-1,\ 1)$，当 $x\in(-1,\ 1)$ 时，有

$s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$ ，…………………………………………………(10 分)

故 $s(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$ ………………………………(12 分)

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^{-1}\ln 2$. ………………………………(13 分)

于是，当 $-1\le x<1$ 时，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^x\ln(1-x)$. ………………(15 分)

得　分	
评阅人	

八、（10 分）求 $x \to 1-$ 时，与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

解：$\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt \le \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \le 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt$， …………………………………………………(3 分)

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 \ln\frac{1}{x}} dt$$ ……………………………………….....……(7 分)

$$= \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$ ……………………………...(10 分)

第二届中国大学生数学竞赛预赛试卷
参考答案及评分标准
（非数学类，2010）

一（本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）、计算下列各题（要求写出重要步骤）.

(1) 设 $x_n=(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中 $|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 将 x_n 恒等变形

$$x_n=(1-a)(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})\frac{1}{1-a}=(1-a^2)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})\frac{1}{1-a}$$

$$=(1-a^4)\cdot(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})\frac{1}{1-a}=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a},$$

由于 $|a|<1$，可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{2^n}=0$，从而

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{1-a}.$$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{x}\right)^{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}e^{-1}\right]^{x}$

$$=\exp\left(\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}-1\right]x\right)=\exp\left(\lim_{x\to\infty}x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to\infty}x\left[x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)-1\right]\right)=e^{-\frac{1}{2}}.$$

(3) 设 $s>0$，求 $I_n=\int_0^{+\infty}e^{-sx}x^n dx\ (n=1,2,\cdots)$.

解 因为 $s>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-sx}x^n=0$，所以，

$$I_n=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}x^n de^{-sx}=-\frac{1}{s}\left[x^n e^{-sx}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-sx}dx^n\right]=\frac{n}{s}I_{n-1}$$

由此得到，$I_n=\dfrac{n}{s}I_{n-1}=\dfrac{n}{s}\cdot\dfrac{n-1}{s}I_{n-2}=\cdots=\dfrac{n!}{s^n}I_0=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$

(4) 设函数$f(t)$有二阶连续的导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f(\frac{1}{r})$，求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解 因为$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$，所以

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}f'(\frac{1}{r}),\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^6}f''(\frac{1}{r})+\frac{2x^2-y^2}{r^5}f'(\frac{1}{r}).$$

利用对称性，$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{r^4}f''(\frac{1}{r})+\frac{1}{r^3}f'(\frac{1}{r})$

(5) 求直线$l_1:\begin{cases}x-y=0\\z=0\end{cases}$ 与直线$l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$的距离.

解 直线l_1的对称式方程为$l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$. 记两直线的方向向量分别为

$\vec{l_1}=(1,1,0)$，$\vec{l_2}=(4,-2,-1)$，两直线上的定点分别为$P_1(0,0,0)$和$P_2(2,1,3)$，

$\vec{a}=\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,3)$.

$\vec{l_1}\times\vec{l_2}=(-1,1,-6)$. 由向量的性质可知，两直线的距离

$$d=\left|\frac{\vec{a}\cdot(\vec{l_1}\times\vec{l_2})}{\left|\vec{l_1}\times\vec{l_2}\right|}\right|=\frac{|-2+1-18|}{\sqrt{1+1+36}}=\frac{19}{\sqrt{38}}=\sqrt{\frac{19}{2}}$$

二（本题共 15 分）、 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶导数，并且

$f''(x)>0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$，且存在一点$x_0$，使得$f(x_0)<0$.

证明：方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$恰有两个实根.

证 1. 由$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\alpha>0$必有一个充分大的$a>x_0$，使得$f'(a)>0$.

$f''(x)>0$知$y=f(x)$是凹函数，从而$f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)\quad (x>a)$

当$x\to+\infty$时，$f(+\infty)+f'(a)(x-a)\to+\infty$.

故存在$b>a$，使得

$f(b)>f(a)+f'(a)(b-a)>0$ .... （6 分）

同样，由 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0$，必有 $c<x_0$，使得 $f'(c)<0$.

$f''(x)>0$ 知 $y=f(x)$ 是凹函数，从而 $f(x)>f(c)+f'(c)(x-c) \quad (x<c)$

当 $x\to-\infty$ 时， $f(-\infty)+f'(c)(x-c)\to+\infty$.

故存在 $d<c$，使得

$f(d)>f(c)+f'(c)(d-c)>0$ .... （10 分）

在 $[x_0,b]$ 和 $[d,x_0]$ 利用零点定理， $\exists x_1\in(x_0,b)$ ， $x_2\in(d,x_0)$ 使得

$f(x_1)=f(x_2)=0$ .... （12 分）

下面证明方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 只有两个实根.

用反证法. 假设方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有三个实根，不妨设为 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<x_2<x_3$. 对 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 和 $[x_2,x_3]$ 上分别应用洛尔定理，则各至少存在一点 ξ_1（$x_1<\xi_1<x_2$）和 ξ_2（$x_2<\xi_2<x_3$），使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$. 再将 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上使用洛尔定理，则至少存在一点 $\eta(\xi_1<\eta<\xi_2)$，使 $f''(\eta)=0$. 此与条件 $f''(x)>0$ 矛盾. 从而方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不能多于两个根. ....（15 分）

证 2. 先证方程 $f(x)=0$ 至少有两个实根.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$，必有一个充分大的 $a>x_0$，使得 $f'(a)>0$.

因 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，故 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 均连续. 由拉格朗日中值定理，对于 $x>a$ 有

$$f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)]=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)]$$

$$=f'(\xi)(x-a)-f'(a)(x-a)=[f'(\xi)-f'(a)](x-a)$$

$$=f''(\eta)(\xi-a)(x-a).$$

其中 $a<\xi<x,\quad a<\eta<x$. 注意到 $f''(\eta)>0$（因为 $f''(x)>0$），则

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \qquad (x > a)$$

又因 $f'(a) > 0$，故存在 $b > a$，使得

$$f(b) > f(a) + f'(a)(b-a) > 0$$ ....（6 分）

又已知 $f(x_0) < 0$，由连续函数的中间值定理，至少存在一点 $x_1(x_0 < x_1 < b)$ 使得

$f(x_1) = 0$．即方程 $f(x) = 0$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上至少有一个根 x_1 ....（7 分）

同理可证方程 $f(\mathrm{x}) = 0$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上至少有一个根 x_2． ....（12 分）

下面证明方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 只有两个实根.（以下同证 1）.......（15 分）

三（本题共 15 分）、设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(t > -1)$ 所确定．且 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3}{4(1+t)}$，其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y = \psi(t)$ 与 $y = \int_1^{t^2} e^{-u^2}du + \dfrac{3}{2e}$ 在 $t = 1$ 处相切．求函数 $\psi(t)$．

解　因为 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{2+2t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{2+2t} \cdot \dfrac{(2+2t)\psi''(t) - 2\psi'(t)}{(2+2t)^2} = \dfrac{(1+t)\psi''(t) - \psi'(t)}{4(1+t)^3}$，

................（3 分）

由题设 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3}{4(1+t)}$，故 $\dfrac{(1+t)\psi''(t) - \psi'(t)}{4(1+t)^3} = \dfrac{3}{4(1+t)}$，从而

$(1+t)\psi''(t) - \psi'(t) = 3(1+t)^2$，即　$\psi''(t) - \dfrac{1}{1+t}\psi'(t) = 3(1+t).$

设 $u = \psi'(t)$，则有 $u' - \dfrac{1}{1+t}u = 3(1+t)$，

$$u = e^{\int \frac{1}{1+t}dt}\left[\int 3(1+t)e^{-\int \frac{1}{1+t}dt}dt + C_1\right] = (1+t)\left[\int 3(1+t)(1+t)^{-1}dt + C_1\right] = (1+t)(3t + C_1).$$

...........（9 分）

由曲线 $y = \psi(t)$ 与 $y = \int_1^{t^2} e^{-u^2}du + \dfrac{3}{2e}$ 在 $t = 1$ 处相切知 $\psi(1) = \dfrac{3}{2e}$，$\psi'(1) = \dfrac{2}{e}$． ....（11 分）

所以$u\big|_{t=1}=\psi'(1)=\dfrac{2}{e}$，知$C_1=\dfrac{1}{e}-3$.

$\psi(t)=\int(1+t)(3t+C_1)dt=\int(3t^2+(3+C_1)t+C_1)dt=t^3+\dfrac{3+C_1}{2}t^2+C_1t+C_2$，由$\psi(1)=\dfrac{3}{2e}$，知$C_2=2$，于是$\psi(t)=t^3+\dfrac{1}{2e}t^2+(\dfrac{1}{e}-3)t+2\ (t>-1)$. ...（15 分）

四（本题共 15 分）、设 $a_n>0,\ S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，证明：

（1）当$\alpha>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$收敛；

（2）当$\alpha\le 1$，且$S_n\to\infty$（$n\to\infty$）时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$发散.

证明 令 $f(x)=x^{1-\alpha},x\in[S_{n-1},S_n]$. 将 $f(x)$ 在区间$[S_{n-1},S_n]$上用拉格朗日中值定理，

存在$\xi\in(S_{n-1},S_n)$

$$f(S_n)-f(S_{n-1})=f'(\xi)(S_n-S_{n-1})$$

即$S_n^{1-\alpha}-S_{n-1}^{1-\alpha}=(1-\alpha)\xi^{-\alpha}a_n$ ....（5 分）

（1）当$\alpha>1$时，$\dfrac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{S_n^{\alpha-1}}=(\alpha-1)\dfrac{a_n}{\xi^\alpha}\ge(\alpha-1)\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$. 显然$\left\{\dfrac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right\}$的前 n 项和有界，从而收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$收敛. ....（8 分）

（2）当$\alpha=1$时，因为$a_n>0$，S_n单调递增，所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\ge\frac{1}{S_{n+p}}\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k=\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}$$

因为$S_n\to+\infty$对任意 n，当$p\in\mathbb{N}$ $\dfrac{S_n}{S_{n+p}}<\dfrac{1}{2}$，从而$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\dfrac{a_k}{S_k}\ge\dfrac{1}{2}$. 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散. ....（12 分）

当$\alpha<1$时，$\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}\ge\dfrac{a_n}{S_n}$. 由$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$发散及比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^\alpha}$发散.........（15 分）

五（本题共 15 分）、设 l 是过原点，方向为 (α,β,γ)（其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$）的直线，均匀椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$（其中 $0<c<b<a$ ，密度为 1）绕 l 旋转.

(1) 求其转动惯量；(2) 求其转动惯量关于方向 (α,β,γ) 的最大值和最小值.

解 (1) 设旋转轴 l 的方向向量为 $\mathbf{l}=(\alpha,\beta,\gamma)$，椭球内任意一点 P$(x,y,z)$的径向量为 $\mathbf{r}$，则点 P 到旋转轴 l 的距离的平方为

$$d^2=\mathbf{r}^2-(\mathbf{r}\cdot\mathbf{l})^2=(1-\alpha^2)x^2+(1-\beta^2)y^2+(1-\gamma^2)z^2-2\alpha\beta xy-2\beta\gamma yz-2\alpha\gamma xz$$

由积分区域的对称性可知

$$\iiint\limits_{\Omega}(2\alpha\beta xy+2\beta\gamma yz+2\alpha\gamma xz)dxdydz=0\text{，其中}\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right.\right\}$$

..................（2 分）

而 $\iiint\limits_{\Omega}x^2dxdydz=\int_{-a}^{a}x^2dx\iint_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1-\frac{x^2}{a^2}}dydz=\int_{-a}^{a}x^2\cdot\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4a^3bc\pi}{15}$

（或 $\iiint\limits_{\Omega}x^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 a^2r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\cdot abcr^2\sin\varphi dr=\frac{4a^3bc\pi}{15}$）

$\iiint\limits_{\Omega}y^2dxdydz=\frac{4ab^3c\pi}{15}$，$\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz=\frac{4abc^3\pi}{15}$ ....（5 分）

由转到惯量的定义

$J_l=\iiint\limits_{\Omega}d^2dxdydz=\frac{4abc\pi}{15}\left((1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2\right)$ ....（6 分）

(2) 考虑目标函数 $V(\alpha,\beta,\gamma)=(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2$ 在约束 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ 下的条件极值.

设拉格朗日函数为

$$L(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2+\lambda(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1)$$

.....................（8 分）

令 $L_\alpha=2\alpha(\lambda-a^2)=0$，$L_\beta=2\beta(\lambda-b^2)=0$，$L_\gamma=2\gamma(\lambda-c^2)=0$，

$L_\lambda=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1=0$

解得极值点为$Q_1(\pm1,0,0,a^2)$，$Q_2(0,\pm1,0,b^2)$，$Q_3(0,0,\pm1,c^2)$ ....（12 分）

比较可知，绕z轴（短轴）的转动惯量最大，为$J_{\max}=\frac{4abc\pi}{15}\left(a^2+b^2\right)$；绕$x$轴（长轴）的转动惯量最小，为$J_{\min}=\frac{4abc\pi}{15}\left(b^2+c^2\right)$. ....（15 分）

六（本题共 15 分）、设函数$\varphi(x)$具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线C上，曲线积分$\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$的值为常数.

(1) 设L为正向闭曲线$(x-2)^2+y^2=1$. 证明：$\oint_L \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=0$；

(2) 求函数$\varphi(x)$；

(3) 设C是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求$\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$.

解 (1) 设$\oint_L \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=I$，闭曲线$L$由$L_i,i=1,2$组成. 设$L_0$为不经过原点的光滑曲线，使得$L_0\cup L_1^-$（其中$L_1^-$为$L_1$的反向曲线）和$L_0\cup L_2$分别组成围绕原点的分段光滑闭曲线$C_i,i=1,2$. 由曲线积分的性质和题设条件

$$\oint_L \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\int_{L_1}+\int_{L_2}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\int_{L_2}+\int_{L_0}-\int_{L_0}-\int_{L_1^-}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$$

$$=\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=I-I=0$$ ....（5 分）

(2) 设$P(x,y)=\frac{2xy}{x^4+y^2}, Q(x,y)=\frac{\varphi(x)}{x^4+y^2}$.

令$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，即$\frac{\varphi'(x)(x^4+y^2)-4x^3\varphi(x)}{(x^4+y^2)^2}=\frac{2x^5-2xy^2}{(x^4+y^2)^2}$，解得

$\varphi(x)=-x^2$ ....（10 分）

(3) 设D为正向闭曲线$C_a: x^4+y^2=1$所围区域，由(1)

$$\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\oint_{C_a}\frac{2xydx-x^2dy}{x^4+y^2}$$ …………………（12 分）

利用 Green 公式和对称性，

$$\oint_{C_a} \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\oint_{C_a}2xydx-x^2dy=\iint_D(-4x)dxdy=0$$ …………………（15 分）

第三届全国大学生数学竞赛预赛试卷

参考答案及评分标准

（非数学类，2011）

一、（本题共 4 小题，每题 6 分，共 24 分）计算题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$.

解：因为 $\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=\dfrac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2\ln(1+x)}{x}=e^2$, ……………………………………………………3 分

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}{x}$$

$=2e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=2e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-e^2$, ………………5 分

所以

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=0$. ………………………………6 分

2. 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\dfrac{\theta}{2^n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解：若 $\theta=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. ………………………1 分

若 $\theta\neq 0$，则当 n 充分大，使得 $2^n>|k|$ 时，

$$a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}\cdot\sin\frac{\theta}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

$=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$. …………………………4 分

$$=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

这时， $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$. …………………………6 分

3. 求$\iint\limits_{D}\operatorname{sgn}(xy-1)dxdy$，其中$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$

解：设　$D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le \frac{1}{2},0\le y\le 2\}$

$D_2=\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}\le x\le 2,0\le y\le \frac{1}{x}\}$

$D_3=\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}\le x\le 2,\frac{1}{x}\le y\le 2\}$.　　　　　　　　　　　　　　………………………………2 分

$\iint\limits_{D_1\cup D_2}dxdy=1+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x}=1+2\ln 2$，$\iint\limits_{D_3}dxdy=3-2\ln 2$.　　　　　　　　…………………………4 分

$\iint\limits_{D}\operatorname{sgn}(xy-1)dxdy=\iint\limits_{D_3}dxdy-\iint\limits_{D_2\cup D_3}dxdy=2-4\ln 2$.　　　　　　　　…………………………6 分

4. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的和函数，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$的和.

解：令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$，则其的定义区间为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. $\forall x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，

$\int_0^x S(t)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{x}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}=\frac{x}{2-x^2}$.　　　　……………………2 分

于是，$S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$，　$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.　　　　　　　…………………………4 分

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{10}{9}$.　　　　　　　…………………………………6 分

二、（本题 2 两问，每问 8 分，共 16 分）设$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$为数列，a,λ为有限数，求证：

1. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$；

2. 如果存在正整数 p，使得$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$.

证明：1. 由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\exists M>0$使得$|a_n|\le M$，且$\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N}$，当 $n>N_1$ 时，

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$　　　　　　　　　　　　　……………………………………4 分

因为$\exists N_2>N_1$，当 $n>N_2$ 时，$\frac{N_1(M+|a|)}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$.

于是，$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right|\le\frac{N_1(M+|a|)}{n}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{(n-N_1)}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，

所以， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$. ……………………………………………………8 分

2. 对于 $i=0,1,\cdots,p-1$，令 $A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$， 易知 $\{A_n^{(i)}\}$ 为 $\{a_{n+p}-a_n\}$ 的子列.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda$.

而 $A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$. 所以， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}}{n}=\lambda$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{p+i}}{n}=0$. 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\lambda$. ……………………………………………………12 分

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n+1)p+i}\cdot\dfrac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$

$\forall m\in\mathbb{N},\exists n,p,i\in\mathbb{N}$，$(0\le i\le p-1)$，使得 $m=np+i$，且当 $m\to\infty$ 时， $n\to\infty$.

所以， $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{a_m}{m}=\dfrac{\lambda}{p}$. ……………………………………………………………16 分

三、（15 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f(-1)=0$， $f(1)=1$， $f'(0)=0$.

求证：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $f'''(x_0)=3$

证. 由马克劳林公式，得

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3，\eta \text{ 介于 0 与 } x \text{ 之间}，\quad x\in[-1,\ 1]\cdots 3 \text{ 分}$$

在上式中分别取 $x=1$ 和 $x=-1$，得

$1=f(1)=f(0)+\dfrac{1}{2!}f''(0)+\dfrac{1}{3!}f'''(\eta_1)$， $0<\eta_1<1$. ……………………………5 分

$0=f(-1)=f(0)+\dfrac{1}{2!}f''(0)-\dfrac{1}{3!}f'''(\eta_2)$， $-1<\eta_2<0$. ……………………………7 分

两式相减，得 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$. ……………………………10 分

由于 $f'''(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续，因此 $f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_2,\eta_1]$ 上有最大值 M 最小值 m，从而

$m\le\dfrac{1}{2}(f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2))\le M$ ……………………………………13 分

再由连续函数的介值定理，至少存在一点 $x_0\in[\eta_2,\eta_1]\subset(-1,1)$，使得

$f'''(x_0)=\dfrac{1}{2}(f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2))=3$. ……………………………15 分

四、（15 分）在平面上，有一条从点$(a,0)$向右的射线，线密度为ρ．在点$(0,h)$处（其中 $h>0$）有一质量为m的质点．求射线对该质点的引力．

解：在x轴的x处取一小段dx，其质量是ρdx，到质点的距离为$\sqrt{h^2+x^2}$，这一小段与质点的引力是

$dF=\dfrac{Gm\rho dx}{h^2+x^2}$（其中 G 为引力常数）．　　…………………5 分

这个引力在水平方向的分量为$dF_x=\dfrac{Gm\rho xdx}{(h^2+x^2)^{3/2}}$．从而

$$F_x=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho xdx}{(h^2+x^2)^{3/2}}=\frac{Gm\rho}{2}\int_a^{+\infty}\frac{d(x^2)}{(h^2+x^2)^{3/2}}=-Gm\rho(h^2+x^2)^{-1/2}\Big|_a^{+\infty}=\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}}$$

……10 分

而dF在竖直方向的分量为$dF_y=\dfrac{Gm\rho hdx}{(h^2+x^2)^{3/2}}$，故

$$F_y=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho hdx}{(h^2+x^2)^{3/2}}=\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\pi/2}\frac{Gm\rho h^2\sec^2 dt}{h^3\sec^3 t}=\frac{Gm\rho}{h}\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\pi/2}\cos tdt=\frac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\arctan\frac{a}{h}\right)$$

所求引力向量为$\mathbf{F}=(F_x,F_y)$．　　…………………………15 分

五、（15 分）设 $z=z(x,y)$ 是由方程$F(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y})=0$确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数. 求证：$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$　和　$x^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x+y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

解：对方程两边求导，$(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{1}{x^2})F_1+\dfrac{\partial z}{\partial x}F_2=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}F_1+(\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{1}{y^2})F_2=0$．　　……5 分

由此解得，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x^2(F_1+F_2)},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-1}{y^2(F_1+F_2)}$

所以，$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$　　…………………………10 分

将上式再求导，$x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2x\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}$

相加得到，$x^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x+y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$　　…………………………15 分

六、（15 分）设函数 $f(x)$ 连续，a,b,c 为常数，Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$．记第一型曲面积分

$I=\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)dS$．求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)du$

解：由 Σ 的面积为 4π 可见：当 a,b,c 都为零时，等式成立. ……………………2 分

当它们不全为零时，可知：原点到平面 $ax+by+cz+d=0$ 的距离是

$\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$． ……………………………5 分

设平面 $P_u: u=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，其中 u 固定．则 $|u|$ 是原点到平面 P_u 的距离，从而

$-1\le u\le 1$． ……………………………8 分

两平面 P_u 和 P_{u+du} 截单位球 Σ 的截下的部分上，被积函数取值为

$f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)$. ……………………………10 分

这部分摊开可以看成一个细长条. 这个细长条的长是 $2\pi\sqrt{1-u^2}$，宽是 $\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$，它的面积是 $2\pi du$，故

我们得证. ……………………………15 分

第四届全国大学生数学竞赛预赛试题
（非数学类）参考答案及评分标准

一、（本题共 5 小题，每小题各 6 分，共 30 分）解答下列各题（要求写出重要步骤）．

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$；

(2) 求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2，使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$；

(3) 已知函数 $z=u(x,y)e^{ax+by}$，且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,$ 确定常数 a 和 b，使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 \mathrm{z}}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial x}-\dfrac{\partial \mathrm{z}}{\partial y}+\mathrm{z}=0$；

(4) 设函数 $u=u(x)$ 连续可微，$u(2)=1$，且 $\int_L (x+2y)udx+(x+u^3)udy$ 在右半平面上与路径无关，求 $u(x)$；

(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt$.

解

（1） 因为 $(n!)^{\frac{1}{n^2}}=e^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$ ……………………………………（1 分）

而 $\dfrac{1}{n^2}\ln(n!)\le\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\ln 1}{1}+\dfrac{\ln 2}{2}+\cdots+\dfrac{\ln n}{n}\right)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$ ………………………（3 分）

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right)=0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln(n!)=0$， 故 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$ ……………………………………（2 分）

（2）过直线 L 的平面束为

$$\lambda(2x+y-3z+2)+\mu(5x+5y-4z+3)=0$$

即 $(2\lambda+5\mu)x+(\lambda+5\mu)y-(3\lambda+4\mu)z+(2\lambda+3\mu)=0$ ，…………………………（2 分）

若平面 π_1 过点 $(4,-3,1)$，代入得 $\lambda+\mu=0$，即 $\mu=-\lambda$，从而 π_1 的方程为

$$3x+4y-z+1=0 \quad ,$$ ……………………………………（2 分）

若平面束中的平面 π_2 与 π_1 垂直，则

$$3\cdot(2\lambda+5\mu)+4\cdot(\lambda+5\mu)+1\cdot(3\lambda+4\mu)=0$$

解得 $\lambda=-3\mu$，从而平面 π_2 的方程为 $x-2y-5z+3=0$ ，………………………………（2 分）

（3）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{ax+by}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}+au(x+y)\right]$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{ax+by}\left[\dfrac{\partial u}{\partial y}+bu(x+y)\right]$， ………………（2 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{ax+by}\left[b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}+abu(x,y)\right].$$ ………………………………………（2 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=e^{ax+by}\left[(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)\right],$$

若使 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$, 只有

$(b-1)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)$=0， 即 $a=b=1$. ………………（2 分）

（4）由 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u[x+u^3]\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left((x+2y)u\right)$ 得 $\left(x+4u^3\right)u'=u$，即 $\dfrac{dx}{du}-\dfrac{1}{u}x=4u^2$ …… .（2 分）

方程通解为

$$x=e^{\ln u}\left(\int 4u^2e^{-\ln u}du+C\right)=u\left(\int 4udu+C\right)=u\left(2u^2+C\right)$$. …………………（3 分）

由 $u(2)=1$ 得 $C=0$，故 $u=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{1/3}$. ……………………………………（1 分）

（5）因为当 $x>1$ 时，

$$\left|\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt\right|\le\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{dt}{\sqrt{t-1}}$$ ………………………………（3 分）

$$\le 2\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)=2\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\to 0(x\to\infty),$$ ……….. ………（2 分）

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt$=0。 ……………………… ………（1 分）

二、（本题 10 分）计算 $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \ |\sin x|\ dx$

解　由于

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x} \, |\sin x| \, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-2x} \, |\sin x| \, dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (-1)^{k-1} e^{-2x} \sin x dx \quad \text{……………………………………（3 分）}$$

应用分部积分法

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (-1)^{k-1} e^{-2x} \sin x dx = \frac{1}{5} e^{-2k\pi} (1 + e^{2\pi}) \quad \text{………………………………（2 分）}$$

所以

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x} \, |\sin x| \, dx = \frac{1}{5}(1+e^{2\pi}) \sum_{k=1}^{n} e^{-2k\pi} = \frac{1}{5}(1+e^{2\pi}) \frac{e^{-2\pi} - e^{-2(n+1)\pi}}{1-e^{-2\pi}} \text{……………（2 分）}$$

当 $n\pi \le x < (n+1)\pi$ 时

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x} \, |\sin x| \, dx \le \int_0^{x} e^{-2x} \, |\sin x| \, dx < \int_0^{(n+1)\pi} e^{-2x} \, |\sin x| \, dx,$$

令 $n \to \infty$，由两边夹法则，得

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} \, |\sin x| \, dx = \lim_{x\to\infty} \int_0^{x} e^{-2x} \, |\sin x| \, dx = \frac{1}{5} \frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1} \text{…………………………（3 分）}$$

注：如果最后不用夹逼法则，而用 $\int_0^{\infty} e^{-2x} \, |\sin x| \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} e^{-2x} \, |\sin x| \, dx = \frac{1}{5} \frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}$，需先说明 $\int_0^{\infty} e^{-2x} \, |\sin x| \, dx$ 收敛.

三、（本题 10 分）求方程 $x^2 \sin\frac{1}{x} = 2x - 501$ 的近似解．精确到 0.001.

解　由泰勒公式 $\sin t = t - \frac{\sin(\theta t)}{2} t^2 \quad (0 < \theta < 1)$ ……………………………………（2 分）

令 $t = \frac{1}{x}$　得　$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)}{2x^2}$,

代入原方程得

$$x - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right) = 2x - 501 \qquad \text{即 } x = 501 - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right) \qquad \text{……………………………（4 分）}$$

由此知 $x>500$，$0<\dfrac{\theta}{x}<\dfrac{1}{500}$

$$|x-501|=\frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)\right|\le\frac{1}{2}\frac{\theta}{x}<\frac{1}{1000}=0.001$$

所以，$x=501$ 即为满足题设条件的解 …………………………（4 分）

四、（本题 12 分）设函数 $y=f(x)$ 的二阶可导，且 $f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0$，求

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $p(x, f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

解：曲线 $y=f(x)$ 在点 $p(x, f(x))$ 处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x),$$

令 $Y=0$，则有 $X=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，由此 $u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，……………………………（3 分）

且有

$$\lim_{x\to 0}u=\lim_{x\to 0}\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}}=\frac{f'(0)}{f''(0)}=0.$$ …………………（2 分）

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$$ ……（2 分）

得

$$\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}=1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=1-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)}{xf'(x)}$$

$$=1-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f''(0)+o(1)}{\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}}=1-\frac{1}{2}\frac{f''(0)}{f''(0)}=\frac{1}{2}$$ …………………（3 分）

$$\therefore\lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\dfrac{f''(0)}{2}u^2+o(u^2)\right)}{u^3\left(\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{u}=2$$ ……………………（2 分）

五、（本题 12 分）求最小实数 C，使得满足 $\int_0^1 |f(x)|dx=1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有

$\int_0^1 f(\sqrt{x})dx \le C$

解　由于　$\int_0^1 |f(\sqrt{x})|dx = \int_0^1 |f(t)|2tdt \le 2\int_0^1 |f(t)|dt = 2,$ ……………………（4 分）

另一方面, 取 $f_n(x)=(n+1)x^n$, 则 $\int_0^1 |f_n(x)|dx = \int_0^1 f_n(x)dx = 1.$ …………………（3 分）

而 $\int_0^1 f_n(\sqrt{x})dx = 2\int_0^1 tf_n(t)dt = 2\frac{n+1}{n+2} = 2\left(1-\frac{1}{n+2}\right) \to 2\ (n\to\infty).$ …………………（3 分）

因此最小的实数 $C=2.$ ………………………………（2 分）

六、（本题 12 分）设 $f(x)$ 为连续函数，$t>0$。 区域 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2\ (t>0)$ 所围起来的部分. 定义三重积分

$$F(t)=\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dv\text{。}$$

求 $F(t)$ 的导数 $F'(t)$.

解法 1.　记 $g=g(t)=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$, 则 Ω 在 xy 面上的投影为 $x^2+y^2\le g$　….（2 分）

在曲线 $S:\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x^2+y^2+z^2=t^2 \end{cases}$ 上任取一点 (x,y,z), 则原点到的点的射线和 z 轴的夹角为 $\theta_t=\arccos\dfrac{z}{t}=\arccos\dfrac{g}{t}$. 取 $\Delta t>0$, 则 $\theta_t>\theta_{t+\Delta t}$. 对于固定的 $t>0$, 考虑积分差 $F(t+\Delta t)-F(t)$, 这是一个在厚度为 Δt 的球壳上的积分. 原点到球壳边缘上的点的射线和 z 轴夹角在 $\theta_{t+\Delta t}$ 和 θ_t 之间. 我们使用球坐标变换来做这个积分, 由积分的连续性可知, 存在 $\alpha=\alpha(\Delta t)$, $\theta_{t+\Delta t}\le\alpha\le\theta_t$, 使得

$$F(t+\Delta t)-F(t)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\alpha}d\theta\int_t^{t+\Delta t}f(r^2)r^2\sin\theta dr\text{ . ……………………（4 分）}$$

这样就有 $F(t+\Delta t)-F(t)=2\pi(1-\cos\alpha)\int_t^{t+\Delta t}f(r^2)r^2dr$. 而当 $\Delta t\to 0^+$,

$$\cos\alpha \to \cos\theta_t = \frac{g(t)}{t}, \qquad \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} f(r^2)r^2 dr \to t^2 f(t^2).$$

故 $F(t)$ 的右导数为

$$2\pi\left(1-\frac{g(t)}{t}\right)t^2 f(t^2) = \pi\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)t\, f(t^2). \quad \text{..................（4 分）}$$

当 $\Delta t < 0$，考虑 $F(t)-F(t+\Delta t)$ 可以得到同样的左导数. 因此

$$F'(t) = \pi\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)t\, f(t^2) \qquad \text{............................（2 分）}$$

解法 2.. 令 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \\ z = z \end{cases}$

则 Ω: $\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le a \\ r^2 \le z \le \sqrt{t^2-r^2} \end{cases}$，其中 a 满足 $a^2+a^4=t^2$，$a = \dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$ ....(2 分）

故有

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f(r^2+z^2)dz = 2\pi\int_0^a r\left(\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-a^2}} f(r^2+z^2)dz\right)dr \quad \text{.......（2 分）}$$

从而有

$$F'(t) = 2\pi\left(a\int_{a^2}^{\sqrt{t^2-a^2}} f(a^2+z^2)dz\frac{da}{dt} + \int_0^a rf(r^2+t^2-r^2)\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}dr\right) \text{....（4 分）}$$

注意到 $\sqrt{t^2-a^2} = a^2$，第一个积分为 0，我们得到

$$F'(t) = 2\pi f(t^2)t\int_0^a r\frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}}dr = -\pi t f(t^2)\int_0^a \frac{d(t^2-r^2)}{\sqrt{t^2-r^2}},$$

所以 $F'(t) = 2\pi t f(t^2)\left(t-a^2\right) = \pi t f(t^2)\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)$ . ...（4 分）

七、（本题 14 分）设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数，

（1）若 $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \dfrac{1}{b_{n+1}}\right) > 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

（2）若 $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \dfrac{1}{b_{n+1}}\right) < 0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

证明：（1）设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=2\delta>\delta>0$，则存在 $N\in\mathbf{N}$,对于任意的 $n\geq N$ 时,

$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}>\delta,\qquad \dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1},\qquad a_{n+1}<\dfrac{1}{\delta}(\dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}),$ ……………（4 分）

$$\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}\leq\frac{1}{\delta}\sum_{n=N}^{m}(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}})\leq\frac{1}{\delta}(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}})\leq\frac{1}{\delta}\frac{a_N}{b_N},$$

因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有上界,从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. ………………………………（4 分）

（2）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}})<\delta<0$ 则存在 $N\in\mathbf{N}$,对于任意的 $n\geq N$ 时,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{b_n}{b_{n+1}}$$

…………………………………（3 分）

有

$$a_{n+1}>\frac{b_{n+1}}{b_n}a_n>\cdots>\frac{b_{n+1}}{b_n}\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdots\frac{b_{N+1}}{b_N}a_N=\frac{a_N}{b_N}b_{n+1}$$

于是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. ………………………………（3 分）

第五届全国大学生数学竞赛预赛试卷 评分细则

一、(共 4 小题,每小题 6 分,共 24 分) 解答下列各题 .

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$.

解 $\because \sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)=\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{2n\pi+\pi\sqrt{1+4n^2}}$ (2 分)

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{2n\pi+\pi\sqrt{1+4n^2}}\right)^n$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{2n\pi+\pi\sqrt{1+4n^2}}\right)\right] \qquad (2 分)$$

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{2n\pi+\pi\sqrt{1+4n^2}}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{2n\pi+\pi\sqrt{1+4n^2}}\right)=e^{\frac{1}{4}} \qquad (2 分)$$

2 证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$ 不是绝对收敛的.

证. 记 $a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\dfrac{|\sin x|}{x}dx$，只要证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散. (2 分)

因为 $a_n\ge\dfrac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\,dx=\dfrac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\dfrac{2}{(n+1)\pi}$. (3 分)

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{(n+1)\pi}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散. (1 分)

3. 设函数 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定. 求 $y(x)$ 的极值.

解 方程两边对 x 求导，得

$$3x^2+6xy+3x^2y'-6y^2y'=0 \qquad (1 分)$$

故 $y'=\dfrac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$，令 $y'=0$，得 $x(x+2y)=0\Rightarrow x=0$ 或 $x=-2y$.

将 $x=0$ 和 $x=-2y$ 代入所给方程，得

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}. \qquad (2 分)$$

又

$$y''=\left.\frac{(2y^2-x^2)(2x+2xy'+2y)+(x^2+2xy)(4yy'-2x)}{(2y^2-x^2)^2}\right|_{\substack{x=0\\y=-1\\y'=0}}=-1<0,$$

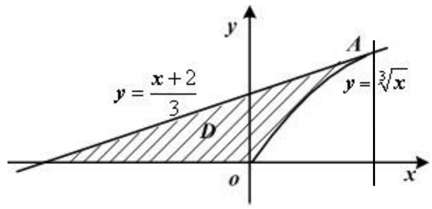
$$y''\Big|_{\substack{x=-2\\y=1\\y'=0}}=1>0.$$

故 $y(0)=-1$ 为极大值， $y(-2)=1$ 为极小值. (3 分)

4. 过曲线 $y=\sqrt[3]{x}(x\geq 0)$ 上的点 A 作切线,使该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$，求点 A 的坐标.

解 设切点 A 的坐标为 $(t,\sqrt[3]{t})$，曲线过 A 点的切线方程为

$$y-\sqrt[3]{t}=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x-t) \qquad (2分)$$



令 $y=0$, 由上式可得切线与 x 轴交点的横坐标 $x_0=-2t$

$\therefore$ 平面图形的面积 $S=\Delta Ax_0t$ 的面积 $-$ 曲边梯形 otA 的面积

$$S=\frac{1}{2}\sqrt[3]{t}\cdot 3t-\int_0^t\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}\,x=\frac{3}{4}t\sqrt[3]{t}=\frac{3}{4}\Rightarrow t=1，\quad \therefore A 的坐标为 (1,1). \qquad (4分)$$

二、 (12 分) 计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}\,x$.

解

$$I=\int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}\,x+\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}\,x$$

$$=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{-x}}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}\,x+\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}\,x \qquad (4 分)$$

$$=\int_{0}^{\pi}(\arctan e^x+\arctan e^{-x})\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}\,x \qquad (2 分)$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \qquad (4 分)$$

$$=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{8} \qquad (2 分)$$

三、(12 分)设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明：级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$收敛.

证　由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，

则 $$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0, \qquad (2\text{ 分})$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0. \qquad (2\text{ 分})$$

应用罗比达法则，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2(x-0)}=\frac{1}{2}f''(0). \qquad (3\text{ 分})$$

所以

$$\lim_{n\to 0}\frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\left|f''(0)\right|. \qquad (2\text{ 分})$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛.　(3 分)

四、(10 分) 设 $|f(x)|\le\pi,\ f'(x)\ge m>0\ (a\le x\le b)$，证明 $\left|\int_a^b \sin f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{2}{m}$.

证 因为 $f'(x)\ge m>0\ (a\le x\le b)$，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单增，从而有反函数.　(2 分)

设 $A=f(a)$，$B=f(b)$，φ 是 f 的反函数，则

$$0<\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}\le\frac{1}{m}, \qquad (3\text{ 分})$$

又 $|f(x)|\le\pi$，则 $-\pi\le A<B\le\pi$，所以

$$\left|\int_a^b \sin f(x)\,\mathrm{d}x\right| \overset{x=\varphi(y)}{=\!=\!=} \left|\int_A^B \varphi'(y)\sin y\,\mathrm{d}y\right| \qquad (3\text{ 分})$$

$$\le\int_0^{\pi}\frac{1}{m}\sin y\,\mathrm{d}y=\frac{2}{m} \qquad (2\text{ 分})$$

五、(14 分)设Σ是一个光滑封闭曲面, 方向朝外.　给定第二型的曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\left(x^3-x\right)dydz+\left(2y^3-y\right)dzdx+\left(3z^3-z\right)dxdy.$$

试确定曲面Σ, 使得积分 I 的值最小, 并求该最小值.

解. 记Σ围成的立体为V，由高斯公式,

$$I=\iiint_V\left(3x^2+6y^2+9z^2-3\right)dv=3\iiint_V\left(x^2+2y^2+3z^2-1\right)dxdydz. \qquad (3\text{ 分})$$

为了使得I达到最小，就要求V是使得$x^2+2y^2+3z^2-1\le 0$的最大空间区域，即

$$V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+2y^2+3z^2\le 1\right\}. \qquad (3\text{ 分})$$

所以V是一个椭球，Σ是椭球V的表面时，积分I最小.

为求该最小值，作变换 $\begin{cases} x=u \\ y=v/\sqrt{2} \\ z=w/\sqrt{3} \end{cases}$. 则 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，有

$$I=\frac{3}{\sqrt{6}}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1}\left(u^2+v^2+w^2-1\right)dudvdw. \qquad (4\text{ 分})$$

使用球坐标变换，我们有

$$I=\frac{3}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1}\left(r^2-1\right)r^2\sin\theta dr=-\frac{4\sqrt{6}}{15}\pi. \qquad (4\text{ 分})$$

六、(14 分) 设$I_a(r)=\displaystyle\int_C\frac{ydx-xdy}{(x^2+y^2)^a}$，其中$a$为常数，曲线$C$为椭圆$x^2+xy+y^2=r^2$，取正向. 求极限$\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)$.

解. 作变换$\begin{cases} x=(u-v)/\sqrt{2} \\ y=(u+v)/\sqrt{2} \end{cases}$,

曲线C变为uov平面上的 $\Gamma:\dfrac{3}{2}u^2+\dfrac{1}{2}v^2=r^2$，也是取正向 (2 分)

且有 $x^2+y^2=u^2+v^2$， $ydx-xdy=vdu-udv$,

$$I_a(r)=\int_\Gamma\frac{vdu-udv}{(u^2+v^2)^a}. \qquad (2\text{ 分})$$

作变换$\begin{cases} u=\sqrt{\dfrac{2}{3}}r\cos\theta \\ v=\sqrt{2}r\sin\theta \end{cases}$，则有$vdu-udv=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}r^2d\theta$

$$I_a(r)=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2(1-a)}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2\cos^2\theta/3+2\sin^2\theta)^a}=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{-2(a-1)}J_a,$$

其中$J_a=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2\cos^2\theta/3+2\sin^2\theta)^a}$，$0<J_a<+\infty$. (3 分)

因此当$a>1$和$a<1$，所求极限分别为 0 和$-\infty$. (2 分)

而当$a=1$,

$$J_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2/3\cos^2\theta+2\sin^2\theta}=4\int_0^{\pi/2}\frac{d\tan\theta}{2/3+2\tan^2\theta}=4\int_0^{+\infty}\frac{dt}{2/3+2t^2}=\sqrt{3}\pi\,. \qquad (3分)$$

故所求极限为

$$\lim_{r\to+\infty}I_a(r)=\begin{cases}0, & a>1\\ -\infty, & a<1\\ -2\pi, & a=1\end{cases}. \qquad (2分)$$

七、(14 分) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性，若收敛，求其和.

解: (1) 记 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, $u_n=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)},n=1,2,3,\cdots$.

因为n充分大时

$$0<a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n\frac{1}{x}dx=1+\ln n<\sqrt{n}, \qquad (3分)$$

所以 $u_n\le\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}<\frac{1}{n^{3/2}}$ 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. (2 分)

（2）$a_k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}(k=1,2,....)$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k+1}-\frac{a_k}{k+2}\right)$$

$$=\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3}\right)+\left(\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{n}-\frac{a_{n-1}}{n+1}\right)+\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\right) \qquad (2分)$$

$$=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}(a_2-a_1)+\frac{1}{4}(a_3-a_2)+\cdots+\frac{1}{n+1}(a_n-a_{n-1})-\frac{1}{n+2}a_n \qquad (2分)$$

$$=\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}\right)-\frac{1}{n+2}a_n=1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}a_n. \qquad (2分)$$

因为$0<a_n<1+\ln n$

所以$0<\frac{a_n}{n+2}<\frac{1+\ln n}{n+2}$ 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{n+2}=0$. 所以$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+2}=0$.

于是 $S=\lim_{n\to\infty}S_n=1-0-0=1$. 证毕。 (3 分)