2013 年研究生入学考试数学二试题及解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x),\left|\alpha(x)\right|<\frac{\pi}{2}$，当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$（　　）

（A）比 x 高阶的无穷小　　（B）比 x 低阶的无穷小

（C）与 x 同阶但不等价的无穷小　　（D）与 x 是等价无穷小

【分析】 当 $x\to 0$ 时，$\cos x-1\sim\frac{1}{2}x^2$。

【详解】 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$ 两边同时除以 x^2 可得

$$\frac{\cos x-1}{x^2}=\frac{x\sin\alpha(x)}{x^2}=\frac{\sin\alpha(x)}{x},$$

两边取 $x\to 0$ 时的无穷小可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

所以当 $x\to 0$ 时，$\sin\alpha(x)\to 0\Rightarrow\alpha(x)\to 0$，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{x}=-\frac{1}{2}，故选（C）。$$

（2）已知 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)-\ln y+x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right)=$（　　）

（A）2　　（B）1　　（C）-1　　（D）-2

【分析】 将 $x=0$ 代入 $\cos(xy)-\ln y+x=1$ 可得 $y=1$，于是

$$\lim_{n\to\infty}n\left(f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right)=2\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)。$$

【详解】 $\cos(xy)-\ln y+x=1$ 两边对 x 求导得

$$-\sin(xy)(y+xy')-\frac{y'}{y}+1=0,$$

将 $x=0$ 代入上式可得 $y'(0)=1$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right)=2f'(0)=2$，

故选（A）。

【注】 类似例题见《数学复习指南》（理工类）第一篇**【例 1.79】**.

（3）设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in[0,\pi) \\ 2, & [\pi,2\pi]\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则（　　）

（A）$x=\pi$ 为 $F(x)$ 的跳跃间断点　　（B）$x=\pi$ 为 $F(x)$ 的可去间断点

（C）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续不可导　　（D）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导

【分析】显然 $x=\pi$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点，是第一类间断点，$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处不可导。

【详解】$F(\pi-)=\int_0^{\pi-}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\pi-}=2$，

$F(\pi+)=\int_0^{\pi-}\sin x\mathrm{d}x+\int_{\pi-}^{\pi+}2\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\pi+}=2$，

$F(\pi)=\int_0^{\pi-}\sin x\mathrm{d}x+\int_{\pi-}^{\pi}2\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\pi+}=2$，

所以 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续，但 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处不可导，故选（C）。

【注】 类似例题见《数学复习指南》（理工类）第一篇**【例 1.64】**.

（4）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<\mathrm{e} \\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge \mathrm{e}\end{cases}$，若反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则（　　）

（A）$\alpha<-2$　（B）$\alpha>2$　（C）$-2<\alpha<0$　（D）$0<\alpha<2$

【分析】

【详解】若反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x$ 和 $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x$ 收敛，于是

$\alpha-1<1,\alpha+1>1\Rightarrow 0<\alpha<2$，故选（D）。

【注】 类似例题见《数学复习指南》（理工类）第一篇**【例 4.51】**.

（5）设 $z=\frac{y}{x}f(xy)$，其中函数 f 可微，则 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$（　　）

（A）$2yf'(xy)$　　（B）$-2yf'(xy)$　　（C）$\frac{2}{x}f(xy)$　　（D）$-\frac{2}{x}f(xy)$

【分析】本题求二元复合函数的一阶偏导数，应用链式法则求解。

【详解】由题设可知 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y^2}{x}f'(xy),\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)$，于是

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2yf'(xy),$$

故选（A）。

【注】 类似例题见《数学复习指南》（理工类）第一篇【例 10.16】.

（6）设 D_k 是圆域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$ 位于第 k 象限的部分，记

$$I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (k=1,2,3,4),$$

则（　　）

（A）$I_1>0$　　（B）$I_2>0$　　（C）$I_3>0$　　（D）$I_4>0$

【分析】联合图形求解。

【详解】$I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_k}r^2(\sin\theta-\cos\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，

由图形可知，仅在第 2 象限，有 $\sin\theta-\cos\theta>0$，所以 $I_2>0$，故选（B）。

【注】 类似例题见《数学复习指南》（理工类）第一篇【例 11.1】.

（7）设矩阵 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$，且 B 可逆，则（　　）

（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
（D）矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

【分析】由 $AB=C\Rightarrow A=CB^{-1}$。

【详解】设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}$，

则由 $AB=C$ 可得

$$c_j=\alpha_1 b_{1j}+\alpha_2 b_{2j}+\cdots+\alpha_n b_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n),$$

则 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出。

由 $AB=C\Rightarrow A=CB^{-1}$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 可由 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 线性表出，

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 等价，即选（B）。

（8）矩阵 $\begin{bmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件为（　　）

（A）$a=0,b=2$　　　　（B）$a=0,b$ 为任意常数

（C）$a=2,b=0$　　　　（D）$a=2,b$ 为任意常数

【详解】若矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{bmatrix}$ 为实对称矩阵，则其可相似对角化。令其特征方程

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -1\\ -a & \lambda-b & -a\\ -1 & -a & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda & -a & -1\\ 0 & \lambda-b & -a\\ -\lambda & -a & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & -a & -1\\ 0 & \lambda-b & -a\\ 0 & -2a & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\left[\lambda^2-(b+2)\lambda+2b-2a^2\right]$$

设 $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则其特征方程为

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-b & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda\left[\lambda^2-(2+b)\lambda+2b\right],$$

若两矩阵相似，则有 $2b-2a^2=2b\Rightarrow a=0$，

反之，若 $a=0$，则有 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=\lambda(\lambda-2)(\lambda-b)$，因为两个矩阵都为实对称矩阵，均与 $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 相似，所以两矩阵相似。

故选（B）。

【注】 类似例题见《数学复习指南》（理工类）第二篇【例 5.10】.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

（9） $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} =$ ________.

【分析】该极限为1^{∞}，可利用快速解法求解。

【详解】$A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2},$$

所以该极限 $I=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ 。

【注】 类似例题见《数学复习指南》（理工类）第一篇【例 1.69】.

（10）设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=0}$ ________.

【分析】利用函数与其反函数的导数的关系计算。

【详解】 $f'(x)=1-e^x$，且 $y=0$ 时， $x=-1$，于是

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=0}=\frac{1}{\left.f'(x)\right|_{x=-1}}=\frac{1}{\left.\left(\sqrt{1-e^x}\right)\right|_{x=-1}}=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}=\sqrt{\frac{e}{e-1}}。$$

【注】 类似例题见《数学复习指南》（理工类）第一篇【例 2.21】.

（11）设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\left(-\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{6}\right)$，则 L 所围平面图形的面积是________.

【分析】直接利用公式 $S=\dfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2 d\theta$ 计算。

【详解】 $S=\dfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}r^2 d\theta=\dfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos 3\theta)^2 d\theta$。

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 6\theta}{2}d\theta=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{24}\sin 6\theta\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}。$$

【注】类似例题见《数学复习指南》（理工类）第一篇【例 7.34】 【例 7.35】.

（12）曲线$\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$上对应于$t=1$点处的法线方程为________

【详解】当$t=1$时，$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4} \\ y=\ln\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\ln 2 \end{cases}$，且$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=1}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\Big|_{t=1}=\dfrac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}\Big|_{t=1}=1$，

所以该法线斜率为-1，故所求法线方程为

$$y-\frac{1}{2}\ln 2=(-1)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)，即\ y=-x+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2。$$

【注】 类似习题见《数学复习指南》（理工类）第一篇习题 1（10）.

（13）已知$y_1=\mathrm{e}^{3x}-x\mathrm{e}^{2x}, y_2=\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x}, y_3=-x\mathrm{e}^{2x}$是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程满足条件$y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=1$的解为$y=$________ .

【详解】由题设可知$y_1-y_3=\mathrm{e}^{3x}, y_2-y_3=\mathrm{e}^{x}$是对应的齐次方程的解，且线性无关，所以

对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{x}$，而$y_3=-x\mathrm{e}^{2x}$为其特解，

所以该方程的通解为

$$y=Y+y_3=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x},$$

又由$y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=1$可得

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ 3C_1+C_2-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=-1 \end{cases},$$

故满足初始条件的解为

$$y=\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x}。$$

【注】完全类似例题见《数学复习指南》（理工类）第一篇【例 6.1】,【例 6.3】.

（14）设$A=(a_{ij})$是 3 阶非零矩阵，$|A|$为A的行列式，A_{ij}为a_{ij}的代数余子式，若$a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则$|A|=$________ .

【分析】本题求抽象矩阵的行列式，利用性质求解，注意题中出现了代数余子式，要想到伴随矩阵A^*及结论$AA^*=A^*A=|A|E$。

【详解】设 A^* 为 A 的伴随矩阵，则由

$$a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)\Rightarrow A+\left(A^*\right)^{\mathrm{T}}=O\Rightarrow A^{\mathrm{T}}+A^*=O,$$

于是 $AA^{\mathrm{T}}+AA^*=O\Rightarrow AA^*=-AA^{\mathrm{T}}\Rightarrow |A|E=-AA^{\mathrm{T}}$，

两边取行列式可得 $|A|^3=-|A|^2\Rightarrow |A|=-1$ 或 0。

若 $|A|=0\Rightarrow AA^{\mathrm{T}}=O\Rightarrow A=O$，而 A 是非零矩阵，所以矛盾，故 $|A|=-1$。

【评注】本题中涉及到了矩阵和行列式的性质。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15） (本题满分 10 分)

当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 和 a 的值。

【详解】$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x=1-\left(\cos x\cos 3x\right)\cos 2x$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\cos 4x+\cos 2x\right)\cos 2x$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\left(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x\right)。$$

由题设可得

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\left(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x\right)}{ax^n}$$

$$\overset{洛}{=}\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x+4\sin 4x+6\sin 6x}{nax^{n-1}}$$

$$\overset{洛}{=}\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{4\cos 2x+16\cos 4x+36\cos 6x}{n\left(n-1\right)ax^{n-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{14}{n\left(n-1\right)ax^{n-2}},$$

所以 $n=2,a=7$。

【注】类似例题见《数学复习指南》（理工类）第一篇【例 1.60】 【例 1.61】.

（16） (本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a\left(a>0\right)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x,V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求 a 的值。

【分析】直接利用平面图形绕坐标轴旋转所得旋转体的体积公式求解。

【详解】 利用公式直接可得

$$V_x=\pi\int_0^a y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^a x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=\frac{3\pi a^{\frac{5}{3}}}{5},$$

$$V_y=2\pi\int_0^a xy\mathrm{d}x=2\pi\int_0^a x^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x=\frac{6\pi a^{\frac{7}{3}}}{7},$$

若 $V_y=10V_x$，则有 $\dfrac{6\pi a^{\frac{7}{3}}}{7}=10\times\dfrac{3\pi a^{\frac{5}{3}}}{5}\Rightarrow a^{\frac{2}{3}}=7\Rightarrow a=7\sqrt{7}$。

【注】类似例题见《数学复习指南》（理工类）第一篇【例 7.38】 【例 7.39】.

（17） **(**本题满分 10 分**)**

设平面区域 D 由直线 $x=3y,y=3x,x+y=8$ 围成，求 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

【分析】本题计算二重积分。先画出草图，确定积分限，然后再求解。

【详解】 $x=3y$ 与 $x+y=8$ 的交点为 $(6,2)$，

$y=3x$ 与 $x+y=8$ 的交点为 $(2,6)$，

显然在该区域内直线 $y=3x$ 和直线 $x+y=8$ 都位于 $x=3y$ 的上方，所以

$$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{3}x}^{3x}\mathrm{d}y+\int_2^6 x^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{3}x}^{8-x}\mathrm{d}y=\frac{32}{3}+128=138\frac{2}{3}。$$

【注】 类似例题见《数学复习指南》（经济类）第一篇【例 10.14】.

（18）（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

（Ⅰ）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

（Ⅱ）存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$。

【分析】（Ⅰ）令 $\xi=x$，则 $f'(x)-1=0\Rightarrow f(x)-x=C\Rightarrow F(x)=f(x)-x$；

（Ⅱ）令 $\eta=x\Rightarrow f''(x)+f'(x)-1=0$

$$\Rightarrow \mathrm{e}^x\left(f''(x)+f'(x)-1\right)=0\Rightarrow \mathrm{e}^x\left[f'(x)-1\right]=C。$$

【详解】（Ⅰ）令 $F(x)=f(x)-x$，由于 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$，于是有

$F(1)=f(1)-1=0,F(0)=f(0)-0=0$，于是 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定

理，即存在$\xi\in(0,1)$，使得$F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=1$。

（Ⅱ）由于$f(x)$为奇函数，所以$f(-1)=-1, f(0)=0$，同（Ⅰ）可得，存在$\tau\in(-1,0)$，使得$f'(\tau)=1$。

令$G(x)=\mathrm{e}^{x}\left[f'(x)-1\right]$，则有$G(\xi)=G(\tau)=0$，$G(x)$在$[\tau,\xi]$上满足罗尔定理，即存在$\eta\in(\tau,\xi)\subset(-1,1)$，使得$G'(\eta)=0$，即$\mathrm{e}^{\eta}\left[f''(\eta)+f'(\eta)-1\right]=0$，而$\mathrm{e}^{\eta}>0$，故

$$f''(\eta)+f'(\eta)=1。$$

【评注】在（Ⅱ）中，由于$f(x)$为奇函数，则$f'(x)$为偶函数，所以$f'(-\xi)=f'(\xi)=1$，则 $G(x)$在$[-\xi,\xi]$上满足罗尔定理。

类似例题见《数学复习指南》（经济类）第一篇【例 5.15】 【例 5.17】.

（19） (本题满分 11 分)

求曲线$x^3-xy+y^3=1(x\ge 0, y\ge 0)$上的点到坐标原点的最长距离和最短距离。

【分析】此题实际求条件最值。

【详解】点(x,y)到原点的距离为$d=\sqrt{x^2+y^2}$，为方便，求$d^2=x^2+y^2$，于是

设$L=x^2+y^2+\lambda\left(x^3-xy+y^3-1\right)$，

$$令\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+3\lambda x^2-\lambda y=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+3\lambda y^2-\lambda x=0,\\ x^3-xy+y^3-1=0\end{cases}$$

将前两式相减可得$(x-y)\left[2+\lambda+3\lambda(x+y)\right]=0\Rightarrow x=y$或$x+y=-\dfrac{2+\lambda}{3\lambda}$。

将前两式相加可得$(2-\lambda)(x+y)+3\lambda\left(x^2+y^2\right)=0$。

将$x=y$代入第 3 式可得$\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$，此时$x^2+y^2=2\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}$

将$x+y=-\dfrac{2+\lambda}{3\lambda}$代入$(2-\lambda)(x+y)+3\lambda\left(x^2+y^2\right)=0$可得

$$x^2+y^2=\frac{\lambda-2}{3\lambda}(x+y)=-\frac{\lambda^2-4}{9\lambda^2},$$

$$xy=\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}=\frac{\frac{(\lambda+2)^2}{9\lambda^2}+\frac{\lambda^2-4}{9\lambda^2}}{2}=\frac{\lambda^2+2\lambda}{9\lambda^2},$$

而 $x^3-xy+y^3=1\Rightarrow(x+y)\left[x^2-xy+y^2\right]-xy=1$

$$-\frac{2+\lambda}{3\lambda}\left[-\frac{\lambda^2-4}{9\lambda^2}-\frac{\lambda^2+2\lambda}{9\lambda^2}\right]=\frac{10\lambda^2+2\lambda}{9\lambda^2}\Rightarrow\lambda^3=-\frac{2}{7}\Rightarrow\lambda=-\sqrt[3]{\frac{2}{7}},$$

此时，$xy=\frac{\lambda^2+2\lambda}{9\lambda^2}=\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{2}{3}}-2\sqrt[3]{\frac{2}{7}}}{9\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{2}{3}}}<0$,因为 $x\geq 0,y\geq 0$,所以此 λ 不适合。

此外，在边界线 $x=0\Rightarrow y=1$，$y=0\Rightarrow x=1$，$\sqrt{x^2+y^2}=1$。

综上，可得最远距离为 $\sqrt{2}$，最近距离为 1。

【注】 类似例题见《数学复习指南》（理工类）第一篇【例 10.33】 【例 10.34】.

（20） (本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小值;

（Ⅱ）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限。

【详解】（Ⅰ） $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}=0\Rightarrow x=1$，又 $f''(1)=\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)\Big|_{x=1}=1>0$，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=1$。

（Ⅱ）由题设可知 $x_n>0$，

又由（Ⅰ）可得

$$\ln x_n+\frac{1}{x_n}\geq 1,\text{ 且 }\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1,\text{ 所以 }\frac{1}{x_{n+1}}<\frac{1}{x_n}\Rightarrow x_n<x_{n+1},$$

于是数列$\{x_n\}$单调递增。

由$\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$可得 $\ln x_n<1-\dfrac{1}{x^{n+1}}<1\Rightarrow x_n<\mathrm{e}$，于是数列$\{x_n\}$有上界，

根据单调增长有上界数列必有极限可得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}\right)=\ln l+\frac{1}{l}\le 1，又\ln l+\frac{1}{l}\ge 1，所以\ln l+\frac{1}{l}=1\Rightarrow l=1。$$

【注】 类似例题见《数学复习指南》(理工类)第一篇【例 1.67】.

(21) **(本题满分 11 分)**

设曲线L的方程为$y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x(1\le x\le \mathrm{e})$，

(Ⅰ)求L的弧长;

(Ⅱ)设D是由曲线L，直线$x=1,x=\mathrm{e}$及x轴所围平面图形，求D的形心的横坐标。

【分析】(Ⅰ)直接利用弧长公式;

【详解】(Ⅰ) $l=\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}}\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+\ln x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^2+\frac{3}{4}。$$

(Ⅱ) D的形心的横坐标为$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$，其中

$$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}x^3\Big|_1^{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}+\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)=\frac{1}{12}\mathrm{e}^3-\frac{7}{12},$$

$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x\ln x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{16}x^4\Big|_1^{\mathrm{e}}-\frac{1}{4}x^2\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}+\frac{1}{8}x^2\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{16}\mathrm{e}^4+\frac{1}{8}\mathrm{e}^2+\frac{1}{16},$$

于是 $\bar{x}=\dfrac{\frac{1}{16}\mathrm{e}^4+\frac{1}{8}\mathrm{e}^2+\frac{1}{16}}{\frac{1}{12}\mathrm{e}^3-\frac{7}{12}}=\dfrac{3\left(\mathrm{e}^4+2\mathrm{e}^2+1\right)}{4\left(\mathrm{e}^3-7\right)}$。

【注】 类似例题见《数学复习指南》(理工类)第一篇【例 7.40】.

（22） (本题满分 11 分)

设 $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{bmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C，使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C。

【详解】 设 $C=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{bmatrix}$，于是

$$AC=\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1+ac_3 & c_2+ac_4\\ c_1 & c_2\end{bmatrix},$$

$$CA=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1+c_2 & ac_1\\ c_3+c_4 & ac_3\end{bmatrix},$$

令 $AC-CA=B$，则有

$$\begin{cases}ac_3-c_2=0\\ c_2+ac_4-ac_1=1\\ c_1-(c_3+c_4)=1\\ c_2-ac_3=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ac_3-c_2=0\\ -a(c_1-c_3-c_4)=1\\ c_1-c_3-c_4=1\\ c_2-ac_3=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=0\end{cases}。$$

于是有

$$\begin{cases}c_2=-c_3\\ c_1=1+c_3+c_4\end{cases}，则 C=\begin{bmatrix}1+c_3+c_4 & -c_3\\ c_3 & c_4\end{bmatrix}，$$

其中 c_3,c_4 为任意常数。

（23） (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记

$$\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix},\beta=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix},$$

（Ⅰ）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha^{\mathrm{T}}\alpha+\beta^{\mathrm{T}}\beta$；

（Ⅱ）若 α,β 正交且均为单位向量，证明二次型 f 在正交变换下的标准形为二次型 $2y_1^2+y_2^2$。

【详解】（Ⅰ）令 $x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$，则

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$$

$$=2x^{\mathrm{T}}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}x+x^{\mathrm{T}}\beta\beta^{\mathrm{T}}x=x^{\mathrm{T}}(2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}+\beta\beta^{\mathrm{T}})x,$$

所以二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}+\beta\beta^{\mathrm{T}}$ 。

（II）若 α,β 正交且均为单位向量，则有 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha=\alpha^{\mathrm{T}}\beta=0$， $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=\beta^{\mathrm{T}}\beta=E$ ，

令 $A=2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}+\beta\beta^{\mathrm{T}}$，则

$$A\alpha=2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\alpha+\beta\beta^{\mathrm{T}}\alpha=2\alpha, A\beta=2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\beta+\beta\beta^{\mathrm{T}}\beta=\beta,$$

所以 A 的特征值为 2,1，又 $A^{\mathrm{T}}=A$，所以二次型 f 在正交变换下的标准形为二次型

$2y_1^2+y_2^2$ 。

【注】类似例题见《数学复习指南》（理工类）第二篇【例 6.5】.