# 2010 年研究生入学考试数学一试题

**一、选择题：**1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$

（A）1　　（B）e　　（C）$e^{a-b}$　　（D）$e^{b-a}$　　[　　]

**【分析】**利用$1^\infty$型极限的快速解法（见评注）及“抓大头准则”可快速得到答案。

**【详解】** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=e^A$，而

$$A=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right]x=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b)x^2+abx}{(x-a)(x+b)}\overset{\text{抓大头准则}}{=}a-b。$$

故选（C）

**【评注】**本题求$1^\infty$型未定式极限。**$1^\infty$型极限的快速解法如下：**

若幂指函数$[1+u(x)]^{v(x)}$的底呈（$1+u(x)$）形式或易化为这种形式（其中$u(x)\to 0$），幂$v(x)\to\infty$， 则$\lim(1+u(x))^{v(x)}=e^A$，其中$A=\lim v(x)u(x)$。

**类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 1 讲【例 5】；完全类似例题见 2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 1 章【例 1.30】；《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 1 章【例 12】【例 13】.**

（2）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定,其中 $F$ 为可微函数,且 $F_2'\neq 0$ ,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

（A）$x$　　（B）$z$　　（C）$-x$　　（D）$-z$　　[　　]

**【分析】**利用隐函数求导法计算。由题设可知，$z$ 为因变量，$x,y$ 为自变量.

**【详解】** $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$两边对 $x$ 求导得

$$F_1' \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + F_2'\left(-\frac{z}{x^2} + \frac{z_x'}{x}\right) = 0 \Rightarrow z_x' = \frac{yF_1' + zF_2'}{xF_2'} \;;$$

$F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 两边对 $y$ 求导得

$$F_1' \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + F_2'\left(\frac{z_y'}{x}\right) = 0 \Rightarrow z_y' = -\frac{F_1'}{F_2'}。$$

故 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$，即选（B）。

**【评注】**本题求多元隐函数的偏导数，为基本题型。

**完全类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 9 讲【例 11】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 9 章【例 9.26】；《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 9 章【例 17】.**

（3）设 $m,n$ 均是正整数,则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的收敛性

（A）仅与 $m$ 的取值有关　　（B）仅与 $n$ 的取值有关

（C）与 $m,n$ 的取值都有关　　（D）与 $m,n$ 的取值都无关　　[　　]

**【分析】**因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}$ 不存在，所以 $x=1$ 为瑕点。而 $x=0$ 是否为瑕点，要看 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}$ 是否存在。

**【详解】** $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$

因为 $x \to 0^+$ 时，$\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} \sim x^{\frac{2}{m}-\frac{1}{n}}$，因为 $m,n$ 是正整数，所以 $\frac{2}{m}-\frac{1}{n} > -1$，

若 $\frac{2}{m}-\frac{1}{n} < 0$，则 $x=0$ 为瑕点，则一定存在常数 $p$ 满足 $0 < \left|\frac{2}{m}-\frac{1}{n}\right| < p < 1$，使得

$$\lim_{x\to 0^+} x^p \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} = \lim_{x\to 0^+} x^{p+\frac{2}{m}-\frac{1}{n}} = 0,$$

于是$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$收敛。

下面考虑反常积分$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$，

因为$\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{2m}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\sqrt[m]{(1-x)^{\frac{1}{2}}\ln^2(1-x)}}{1}=0$，

而$0<\frac{1}{2m}<1$，所以$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$收敛，

故反常积分$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$的收敛性与$m,n$都无关，即选（D）。

**【评注】**对瑕点为$x=b$的瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，设$f(x)$在$[a,b)$上连续，且$f(x)\geq0$，有如下判敛准则：

① 若$\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^m f(x)=k,\ 0\leq k<+\infty,\ 0<m<1$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛；

② 若$\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^m f(x)=k,\ 0<k\leq+\infty,\ m\geq1$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散.

**本题超纲．相关判敛准则可见各教材。**

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

（A）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$　　（B）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$

（C）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$　　（D）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$　　[　　]

**【分析】**本题利用定积分的极限定义即得。

**【详解】**$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{(n+i)}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n^2+j^2)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}\right)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y$$

$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$，故选（D）。

【评注】定积分是利用和式极限定义的，反过来，某些和式极限可利用定积分表示。

若每项提出$\frac{b-a}{n}$或$\frac{1}{n}$后，$n$项和可写成$\sum_{i=1}^{n} f\left[a+\frac{i(b-a)}{n}\right]$或$\sum_{i=1}^{n} f(\frac{1}{n})$的形式，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\text{，特别}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\text{。}$$

**类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 1 讲【例 26】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 1 章【例 1.18】；《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 1 章【例 34】【例 35】**

（5）设$A$是$m\times n$矩阵，$B$是$n\times m$矩阵，$E$为$m$阶单位矩阵，若$AB=E$，则

（A）$r(A)=m,r(B)=m$　　（B）$r(A)=m,r(B)=n$

（C）$r(A)=n,r(B)=m$　　（D）$r(A)=n,r(B)=n$　　[　　]

【分析】本题可利用矩阵秩的性质进行判断。

【详解】由题设可知$m=r(E)=r(AB)\le\min(r(A),r(B))$，即$r(A)\ge m,r(B)\ge m$。

又$A$是$m\times n$矩阵，$B$是$n\times m$矩阵，所以$r(A)\le m,r(B)\le m$。

于是$r(A)=m,r(B)=m$，故选（A）

【评注】本题判断两个矩阵的秩。矩阵秩的结论如$r(AB)\le\min(r(A),r(B))$，

$r(A_{m\times n})\le\min(m,n)$较常用，请熟记。

**类似例题见文登暑期强化班讲义《线性代数》第 2 讲【例 12】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 2 篇第 1 章【例 2.36】，精选习题二第 2 小题（8）（9）；《考研数学核心题型》（理工类）第 2 篇第 16 章【例 12】.**

（6）　设$A$为 4 阶实对称矩阵，且$A^2+A=O$，若$A$的秩为 3 ，则$A$相似于

（A）$\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{bmatrix}$　（B）$\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$　（D）$\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$　　[　　]

【分析】实对称矩阵相似于由其特征值组成的对角阵，所以本题的关键是求出其特征值。

【详解】因为 $A$ 为 4 阶实对称矩阵，所以 $A$ 必可相似对角化，且 $A$ 的特征值全为实数。

设 $\lambda$ 为 $A$ 的特征值，则 $\lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0,\lambda=-1$。又 $A$ 的秩为 3，则 $A$ 的特征值为 $-1,-1,-1,0$，故选（D）。

【评注】 本题综合考查了实对称矩阵可相似对角化，特征值的性质和矩阵的秩等多个知识点。

**完全类似例题见《考研数学核心题型》（理工类）第 2 篇第 18 章【例 3】；类似例题见文登暑期强化班讲义《线性代数》第 5 讲【例 14】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 2 篇第 5 章【例 5.3】.**

（7）设随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\ge 1\end{cases}$，则 $P\{X=1\}=$

（A）0　（B）$\dfrac{1}{2}$　（C）$\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$　（D）$1-\mathrm{e}^{-1}$　[　　]

【分析】由于分布函数在 $x=1$ 处不连续，所以利用 $P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)$ 求解。

【详解】 $P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=1-\mathrm{e}^{-1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$，故选（C）。

【评注】本题已知随机变量的分布函数，求事件 $\{X=1\}$ 发生的概率，为基础题型。题中的随机变量既不是离散型也不是连续型。

**类似例题见文登暑期强化班讲义《概率统计》第 2 讲【例 1】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 3 篇第 2 章【例 2.19】；《考研数学核心题型》（理工类）第 3 篇第 21 章【例 16】**

（8）设 $f_1(x)$ 是标准正态分布的概率密度函数，$f_2(x)$ 是 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度,且 $f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\le 0\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}$，（$a>0,b>0$）为概率密度，则 $a,b$ 应满足

（A）$2a+3b=4$　（B）$3a+2b=4$

（C）$a+b=1$　（D）$a+b=2$　[　　]

【分析】利用 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$ 即可。

【详解】 $f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\le 0\\ bf_2(x), & x>0\end{cases}$，所以

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} af_1(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty} bf_2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+b\int_0^3 f_2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b,$$

于是 $2a+3b=4$，故选（A）。

【评注】本题已知分布反求分布中的参数，为基础题型。

**类似例题见文登暑期强化班讲义《概率统计》第 2 讲【例 16】; 2009 版《数学复习指南》（理工类）第 3 篇第 2 章【例 2.5】，精选习题二第 2 小题（2）;《考研数学核心题型》（理工类）第 3 篇第 21 章【例 11】.**

**二、填空题**：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

（9）设 $x=\mathrm{e}^{-t}, y=\int_0^t \ln\left(1+u^2\right)\mathrm{d}u$ ,则 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=0}=$__________.

【分析】利用参数方程求导公式求解即可。

【详解】$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{e}^{-t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\ln\left(1+t^2\right)$，于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\ln\left(1+t^2\right)}{-\mathrm{e}^{-t}}=-\mathrm{e}^t\ln\left(1+t^2\right), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=-\mathrm{e}^t\ln\left(1+t^2\right)\Big|_{t=0}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\left[-\mathrm{e}^t\ln\left(1+t^2\right)\right]_t'\cdot\left(-\mathrm{e}^t\right)$$

$$=\mathrm{e}^t\left[\mathrm{e}^t\ln\left(1+t^2\right)+\mathrm{e}^t\frac{2t}{1+t^2}\right]=\mathrm{e}^{2t}\left[\frac{2t}{1+t^2}+\ln\left(1+t^2\right)\right],$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=0}=0。$$

【评注】本题为参数方程求导，为基础题型。要注意求二阶导数时千万不要忘了乘以 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$ .

**完全类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 2 讲【例 15】;《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 2 章【例 18】;类似例题见 2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 2 章【例 2.12】.**

（10）$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x=$__________.

【分析】被积函数中含根式，作变量代换 $\sqrt{x}=t$ 即可。

【详解】$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x \overset{\sqrt{x}=t}{=} 2\int_0^{\pi}t^2\cos t\mathrm{d}t$

$$=2t^2\sin t\Big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}t\sin t\mathrm{d}t=4t\cos t\Big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}\cos t\mathrm{d}t=-4\pi。$$

【评注】本题计算定积分，为基础题型。对定积分作变量代换时，注意上下限要跟着改变。

**类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 5 讲【例 16】; 2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 3 章【例 3.29】;《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 4 章【例 3】.**

（11）已知曲线 $L$ 的方程为 $y=1-|x|\left(x\in[-1,1]\right)$,起点为 $(-1,0)$,终点为 $(1,0)$,则曲线积分

$\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=$________.

**【分析】**本题求对坐标的曲线积分，可化为参数式计算，也可利用格林公式计算。

**【详解】** $y=1-|x|=\begin{cases}1-x, & 0\le x<1\\ 1+x, & -1\le x<0\end{cases}$，于是

$$\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}\left[x(1+x)+x^2\right]\mathrm{d}x+\int_0^1\left[x(1-x)\mathrm{d}x-x^2\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=0。$$

**【评注】**本题还可用格林公式另解为：

$$\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\oint_{L+L'}xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y-\int_{L'}xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y,$$

其中 $L':y=0\left((1,0)\to(-1,0)\right)$。

$$\oint_{L+L'}xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

（上式是因为积分域关于 $y$ 轴对称，被积函数是 $x$ 的奇函数)。

又在 $L':y=0\left((1,0)\to(-1,0)\right)$ 上，$\int_{L'}xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$，

所以 $\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$。

**类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 12 讲【例 5】；2009 版《数学复习指南》(理工类）第 1 篇第 11 章【例 11.3】;《考研数学核心题型》(理工类）第 1 篇第 12 章【例 3】.**

（12）设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le z\le 1\right\}$,则 $\Omega$ 的形心竖坐标 $\bar{z}=$________

**【分析】**直接利用形心公式即可。

**【详解】** $$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}V}{\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}V}=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 z\mathrm{d}z}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1\mathrm{d}z}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{1}{6}r^6\right)_0^1}{\left(\frac{r^2}{2}-\frac{1}{4}r^4\right)_0^1}=\frac{2}{3}。$$

**【评注】**本题求空间区域的形心坐标，为重积分在几何中的应用。

**类似例题见《考研数学核心题型》(理工类）第 1 篇第 10 章【例 35】;2009 版《数学复习指南》(理工类）第 1 篇第 10 章精选习题十第 18，19 小题.**

(13) 设 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}, \alpha_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$,若由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 所形成的向量空间的维数为 2，则 $a=$________ .

【分析】"由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 所形成的向量空间的维数为 2"这句话表明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 2，令

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，对 $A$ 作初等行变换即可。

【详解】若由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 所形成的向量空间的维数为 2，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 2，于是

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&1&3\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&a-6\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow a=6。$$

【评注】求具体向量组的秩、极大线性无关组等问题，一般将向量组组成矩阵，用初等变换求解。

**类似例题见文登暑期强化班讲义《线性代数》第 3 讲【例 2】; 2009 版《数学复习指南》(理工类) 第 2 篇第 3 章【例 3.18】;《考研数学核心题型》(理工类) 第 2 篇第 16 章【例 2】【例 8】.**

(14) 设随机变量 $X$ 的概率分布为 $P(X=k)=\dfrac{C}{k!}(k=0,1,2,\cdots)$,则 $EX^2=$__________ .

【分析】先利用随机变量概率分布性质 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}P(X=k)=1$ 求出分布中的参数，然后再利用公式 $EX^2=DX+(EX)^2$ 求解。

【详解】 $P(X=k)=\dfrac{C}{k!}(k=0,1,2,\cdots)\Rightarrow 1=\sum\limits_{k=0}^{\infty}P(X=k)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{C}{k!}=C\mathrm{e}\Rightarrow C=\mathrm{e}^{-1}$，

所以 $X$ 服从参数为 1 的泊松分布。

故 $EX^2=DX+(EX)^2=1+1=2$。

【评注】本题求随机变量的二阶中心矩，要熟记常见分布的数学期望和方差。

**类似例题见 2009 版《数学复习指南》(理工类) 第 3 篇第 3 章【例 3.4】;《考研数学核心题型》(理工类) 第 3 篇第 23 章【例 3】.**

## 三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) **(本题满分 10 分)**

求微分方程 $y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^x$ 的通解.

【分析】先利用特征方程求出对应齐次方程的通解，再由待定系数法求非齐次方程的一个特解，最后由非齐次方程解的结构写出通解。

【详解】 $y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^x$ 对应的齐次方程为

$y''-3y'+2y=0$，其特征方程为

$\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=1,\lambda=2$，于是通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}。$$

因为 $\lambda=1$ 为特征单根，所以设特解为 $y^*=\left(Ax+B\right)x\mathrm{e}^x$，则

$y^{*\prime}=\left(Ax^2+\left(2A+B\right)x+B\right)\mathrm{e}^x, y^{*\prime\prime}=\left(Ax^2+\left(4A+B\right)x+2A+2B\right)\mathrm{e}^x$，

代入原方程有

$\begin{cases}\left(4A+B\right)-\left(2A+B\right)+2B=2\\ B-6B=0\end{cases} \Rightarrow A=-1,B=-2$，所以 $y^*=-\left(x+2\right)x\mathrm{e}^x$。

故原方程的通解为

$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-\left(x+2\right)x\mathrm{e}^x$，$C_1,C_2$ 为任意常数。

**【评注】**本题考查二阶常系数非齐次线性微分方程的通解，要熟练掌握其解法。非齐次常系数微分方程的通解等于对应齐次微分方程的通解与一个特解的和。

**类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 7 讲【例 11】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 5 章【例 5.14】,【例 5.15】;《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 7 章【例 18】.**

（16） **(**本题满分 10 分)

求函数 $f\left(x\right)=\int_1^{x^2}\left(x^2-t\right)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的单调区间与极值.

**【分析】**先求出 $f'\left(x\right)$ 的零点，用所求的点将 $f\left(x\right)$ 的定义域分为若干个子区间，然后列表判断每个子区间内 $f'\left(x\right)$ 的符号即可。

**【详解】**函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(-\infty,+\infty\right)$。由于

$f\left(x\right)=\int_1^{x^2}\left(x^2-t\right)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=x^2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_1^{x^2}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，

$f'\left(x\right)=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+2x^3\mathrm{e}^{-x^4}-2x^3\mathrm{e}^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，

令 $f'\left(x\right)=0 \Rightarrow x=0,x=\pm1$。

以 $x=0,x=\pm1$ 为分隔点列表如下：

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $0$ | $(0,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | 单调下降 | 极小值 | 单调上升 | 极大值 | 单调下降 | 极小值 | 单调上升 |

综上，$f(x)$ 的单调减少区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,1)$；单调增加区间为 $(-1,0)$ 和 $(1,+\infty)$。

$f(x)$ 在 $x=\pm1$ 取得极小值 $f(\pm1)=0$；$f(x)$ 在 $x=0$ 取得极大值 $f(0)=\int_1^0(0-t)e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_1^0=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$。

**【评注】**本题为基础题型。确定函数的极值和单调增减区间的步骤为：

(1) 确定函数的定义域；

(2) 找出使函数一阶导数为零或不存在的点；

(3) 以（2）中所求的点为分隔点将定义域分为若干个子区间；

(4) 利用各个子区间内 $f'(x)$ 的符号即得。

**类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 6 讲【例 2】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 6 章【例 6.8】，【例 6.12】；《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 6 章【例 2】.**

（17） (本题满分 10 分)

(Ⅰ)比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n\ln|t|dt\ (n=1,2,\cdots)$ 的大小,说明理由.

(Ⅱ)记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt\ (n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

**【分析】**利用定积分比较定理，两个积分的大小的比较可转化为被积函数大小的比较。

**【详解】**(Ⅰ)令 $f(t)=[\ln(1+t)]^n-t^n\ (0\le t\le1)$,

当 $n=1$ 时, $f'(t)=\frac{1}{1+t}-1<0$,所以 $f(t)=\ln(1+t)-t<f(0)=0$,

即有 $0\le\ln(1+t)\le t$,从而有 $0\le[\ln(1+t)]^n\le t^n\ (0\le t\le1)$

所以 $f(t)=[\ln(1+t)]^n-t^n<0$,即有

$$|\ln t|[\ln(1+t)]^n<t^n|\ln t|,$$

故由定积分比较定理可得 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt\le\int_0^1 t^n|\ln t|dt\ (n=1,2,\cdots)$.

(Ⅱ) $0\le u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt\le\int_0^1|\ln t|t^n dt$ ,又

$$\int_0^1 |\ln t| t^n \mathrm{d}t = -\int_0^1 \ln t \cdot t^n \mathrm{d}t = -\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 t\mathrm{d}t = -\frac{1}{2(n+1)} \to 0(n\to\infty),$$

所以由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

【评注】在考试中，(Ⅱ) 的计算常常要借助(Ⅰ)的结果。

**类似例题见《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 4 章【例 4】；**
**相关结论见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 5 讲和 2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 3 章.**

(18)（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

【分析】因为缺项，所以要利用比值法计算收敛半径，再通过讨论幂级数在收敛区间端点的收敛性得出收敛域。求和函数时，因为含 $n$ 的项在分母上，所以先逐项求导计算。

【详解】记 $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$，由于

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}}{\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}}\right| = x^2 \le 1 \Rightarrow -1<x<1$$，于是可得幂级数

的收敛区间为 $(-1,1)$，当 $x=\pm 1$ 时，原幂级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，由莱布尼茨交错级数判敛法则可知此级数收敛，所以幂级数的收敛域为 $[-1,1]$。

当 $x\in[-1,1]$ 时，

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$$

$$= x\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right]'\mathrm{d}x = x\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = x\arctan x 。$$

【评注】若幂级数不是标准形式，缺项，形式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^{2n},\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^{2n+1}$ 等，则需利用比值法求收敛半径，即利用后项比前项的绝对值取极限来计算。如对 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$，令

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\rho(x)<1$，求出 $x$ 的范围，即收敛区间。

**类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 11 讲【例 15】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 7 章【例 7.19】；《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 11 章【例 28】，【例 32】.**

（19） (本题满分 10 分)

设 $P$ 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点,若 $S$ 在点 $P$ 处的切平面与 $xOy$ 面垂直,求点 $P$ 的轨迹 $C$ ,并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\left(x+\sqrt{3}\right)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma$ 是椭球面位于 $C$ 上方的部分。

【分析】本题求点的轨迹，只要求出它满足的方程即可。曲面积分可化为投影域上的二重积分计算。

【详解】设 $P\left(x_0,y_0,z_0\right)$，$S$ 在 $P$ 处的切平面方程为

$$x_0x+\left(2y_0-z_0\right)y+\left(2z_0-y_0\right)z=0,$$

因为切平面与 $xOy$ 面垂直，所以

$$x_0\cdot 0+\left(2y_0-z_0\right)\cdot 0+\left(2z_0-y_0\right)\cdot 1=0\Rightarrow 2z_0-y_0=0,$$

又 $P$ 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，所以 $C$ 的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1\\ y=2z\end{cases}，即\begin{cases}2z-y=0\\ x^2+\dfrac{3}{4}y^2=1\end{cases}。$$

取 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+\dfrac{3}{4}y^2\le 1\right\}$，记 $\Sigma$ 的方程为 $z=z(x,y)$，$(x,y)\in D$。

由于

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{2x}{y-2z}\right)^2+\left(\frac{2y-z}{y-2z}\right)^2}=\frac{\sqrt{y^2+z^2-4yz+4}}{|y-2z|},$$

所以

$$故\iint\limits_{\Sigma}\frac{\left(x+\sqrt{3}\right)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}\frac{\left(x+\sqrt{3}\right)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\cdot\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D}\left(x+\sqrt{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=0+\sqrt{3}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\cdot\pi\cdot 1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi 。$$

**【评注】** 计算曲面积分时，要想到利用可将曲面方程代入被积式化简后再计算。

**类似例题见文登暑期强化班讲义《高等数学》第 12 讲【例 2】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 1 篇第 11 章【例 11.11】；《考研数学核心题型》（理工类）第 1 篇第 12 章【例 16】.**

（20） **(** 本题满分 11 分)

设 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$,

已知线性方程组 $Ax=b$ 有两个不同的解,

(Ⅰ)求 $\lambda, a$ ;(Ⅱ)求方程 $Ax=b$ 的通解.

**【分析】** 由 " 线性方程组 $Ax=b$ 有两个不同的解 " 可知

非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无数个解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})<3\Rightarrow |A|=0$ 。

**【详解】** 线性方程组 $Ax=b$ 有两个不同的解，则

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0\Rightarrow \lambda=1\text{或}\lambda=-1。$$

当 $\lambda=1$ 时，

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right]，则 r(A)=2\neq 3=r(\bar{A})，所以 \lambda=1 不成立。$$

当 $\lambda=-1$ 时，

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{array}\right],$$

因为 $Ax=b$ 有解，所以 $a+2=0\Rightarrow a=-2$ 。

(Ⅰ)综上，$\lambda=-1, a=-2$ 。

(Ⅱ)原方程与以下方程组同解

$$\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=-2\\-2x_2=1\end{cases}\Rightarrow x=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}+c\\-\frac{1}{2}\\c\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$，其中 $c$ 为任意常数。

**【评注】**本题已知非齐次线性方程组解的情况，反求方程组中的参数，要想到利用解的判定定理求解。

**类似例题见文登暑期强化班讲义《线性代数》第 4 讲【例 5】，【例 11】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 2 篇第 4 章【例 4.11】；《考研数学核心题型》（理工类）第 2 篇第 17 章【例 10】.**

（21） (本题满分 11 分)

已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$,且 $Q$ 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，

(Ⅰ) 求矩阵 $A$；

（Ⅱ）证明矩阵 $A+E$ 为正定矩阵，其中 $E$ 为 3 阶单位矩阵。

**【分析】**本题(Ⅰ)已知二次型的标准形以及化二次型为标准形的正交变换所对应的矩阵中的某一列反求二次型的矩阵，要想到标准形的形式以及正交矩阵的性质。（Ⅱ）由(Ⅰ)可得 $A$ 的特征值，则可得 $A+E$ 的特征值，根据矩阵正定的充要条件之一其特征值均大于零证明即可。

**【详解】**由题设，$A$ 的特征值为 1，1，0，且 $\left(1,0,1\right)^{\mathrm{T}}$ 为 $A$ 的属于特征值 0 的一个特征向量。

设 $x=\left(x_1,x_2,x_3\right)^{\mathrm{T}}$ 为 $A$ 的属于特征值 1 的特征向量，因为 $A$ 的属于不同特征值的特征向量正交，所以 $x^{\mathrm{T}}\left(1,0,1\right)^{\mathrm{T}}=x_1+x_3=0$，取

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},\left(0,1,0\right)^{\mathrm{T}}$ 为 $A$ 的属于特征值 1 的相互正交的单位特征向量。

令 $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，则有 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}$。

(Ⅰ) $A=Q\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}Q^{\mathrm{T}}$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}。$$

（II）由 （I）可知 $A$ 的特征值为 1，1，0，则 $A+E$ 的特征值为 2，2，1，均大于零，又 $A+E$ 为实对称矩阵，所以 $A+E$ 为正定矩阵。

**【评注】**对于任意一个二次型，总可以通过正交变换 $X=PY$，使其化为标准形，

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\cdots+\lambda_n x_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是二次型对应的矩阵 $A$ 的特征值。

**类似例题见文登暑期强化班讲义《线性代数》第 6 讲【例 3】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 2 篇第 6 章【例 6.10】,【例 6.16】;《考研数学核心题型》（理工类）第 2 篇第 19 章【例 15】.**

（22） **(本题满分 11 分)**

设二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\ (-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty),$$

求常数 $A$ 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$。

**【分析】**首先利用二维随机变量分布密度函数的性质求 $A$，然后利用条件概率密度公式求 $f_{Y|X}(y|x)$。

**【详解】**由题设可知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y$$

$$=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$$

$$=A\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=A\pi$$

所以 $A=\frac{1}{\pi}$。于是

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\ (-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)。$$

$X$ 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}\ (-\infty<x<+\infty),$$

于是当 $-\infty < x < +\infty$ 时，条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\frac{\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2}\ (-\infty < y < +\infty)。$$

**【评注】**本题计算二维随机变量概率密度中的常数及条件概率密度，为基础题型。

**类似例题见文登暑期强化班讲义《概率统计》第 3 讲【例 3】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 3 篇第 2 章【例 2.37】,【例 2.38】;《考研数学核心题型》（理工类）第 3 篇第 22 章【例 7】.**

（23） **(本题满分 11 分)**

设总体 $X$ 的概率分布为

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $1-\theta$ | $\theta-\theta^2$ | $\theta^2$ |

其中 $0<\theta<1$ 未知，以 $N_i$ 表示来自总体 $X$ 的随机样本（样本容量为 $n$）中等于 $i$ 的个数 $(i=1,2,3)$，试求常数 $a_1,a_2,a_3$，使 $T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 $\theta$ 的无偏估计量，并求 $T$ 的方差。

**【分析】**由题设可知 $N_i$ 均服从二项分布，然后利用 $ET=\theta$ 确定 $a_1,a_2,a_3$。

**【详解】** $ET=\sum_{i=1}^{3}a_iEN_i$。

由题设可知，$N_1\sim B(n,1-\theta),N_2\sim B(n,\theta-\theta^2),N_3\sim B(n,\theta^2)$，

所以 $EN_1=n(1-\theta),EN_2=n(\theta-\theta^2),EN_3=n\theta^2$，于是要使 $T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 $\theta$ 为无偏估计量，必有

$$ET=\sum_{i=1}^{3}a_iEN_i=a_1n(1-\theta)+a_2n(\theta-\theta^2)+a_3n\theta^2$$

$$=n\left[a_1+(a_2-a_1)\theta+(a_3-a_2)\theta^2\right]=\theta，于是$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 - a_1 = \dfrac{1}{n} \\ a_3 - a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = a_3 = \frac{1}{n}。$$

所以 $T = \sum_{i=2}^{3} \frac{1}{n} N_i = \frac{n - N_1}{n} = 1 - \frac{N_1}{n} \left( N_1 + N_2 + N_3 = n \right)$，

故 $DT = D\left(1 - \frac{N_1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} DN_1 = \frac{1}{n^2} \cdot n(1-\theta)\theta = \frac{(1-\theta)\theta}{n}$。

【评注】本题计算 $DT$ 时，利用了 $N_1 + N_2 + N_3 = n$ ，简化了计算。

**类似例题见文登暑期强化班讲义《概率统计》第 1 讲【例 16】；2009 版《数学复习指南》（理工类）第 3 篇第 6 章【例 6.11】，【例 6.12】;《考研数学核心题型》（理工类）第 3 篇第 24 章【例 13】，【例 14】.**